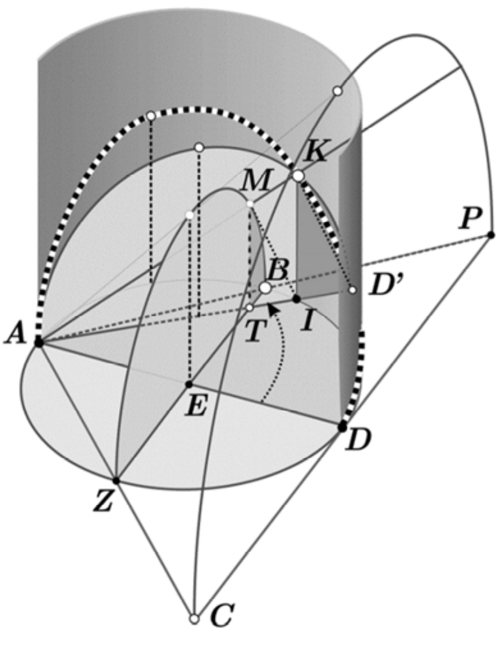
Horst Hischer

Die drei klassischen Probleme der Antike

Historische Befunde und didaktische Aspekte

Zweite Auflage



Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.
Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data is available in the Internet at <http://dnb.ddb.de>.

ISBN 978-3-88120-518-4

Horst Hischer

Die drei klassischen Probleme der Antike
Historische Befunde und didaktische Aspekte

2015 erste Auflage.
2018 zweite, durchgesehene, korrigierte und erweiterte Auflage.

Vorwort

Die drei „berühmten Probleme der Antike“ – nämlich die Quadratur des Kreises, die Verdoppelung des Würfels und die Dreiteilung eines Winkels – waren seit fast 2 500 Jahren Gegenstand mathematischer Betrachtungen, und sie fanden als „klassische Probleme der Antike“ Eingang in die Fachliteratur. Sie wurden und werden aber auch von mathematischen Laien aufgegriffen, die dann gelegentlich angebliche „Lösungen“ präsentieren. Dabei wurde im 19. Jahrhundert in der Mathematik abschließend bewiesen, dass diese drei Probleme *sämtlich nicht lösbar* sind. Im Mathematikstudium werden sie – wenn überhaupt – meist nur marginal in Vorlesungen erwähnt, und allenfalls werden sie dann mit wenigen Beweiszeilen als nicht lösbar vorgestellt.

Ohne vertiefte Kenntnis des mathematischen Gehalts dieser Probleme geht es hierbei nach landläufiger Meinung um reale „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“. Auf dieser Basis sind dann diverse Vorschläge denkbar, wie man diese Probleme „technisch“ lösen kann. So ist es nicht verwunderlich, dass viele solcher „Problemlöser“ mit ihrem Vorschlag die Hoffnung auf Berühmtheit und sogar eine finanzielle Würdigung verbinden, wie etwa ein Carl Paul Bouche mit einer sieben Seiten umfassenden, 1824 sogar im Druck erschienenen Abhandlung mit seiner „Lösung“ der Quadratur des Kreises. Er schreibt im Vorwort:

> Hochgelehrte insonderheit hochzuverehrende Herren!
>
> Ein neuer Zeitraum beginnt! Nach mehreren Jahrhunderten langes Forschen und Harren, nachdem bereits die gelehrte Welt den Glauben an eine Sache aufgegeben hatte, welche von je her das heisseste Streben Ihrer Wünsche war, dass es da einem Nichtgelehrten gelingen sollte, das Unmöglichscheinende zu lösen, gränzt an ein Wunder! Und dennoch ist es mir mit Gottes Hülfe gelungen! – Gegenwärtiges wird Sie von der Wahrheit meiner Behauptung überzeugen. Ohnerachtet es mich besonders glücklich macht, der Wissenschaft, wie der Welt überhaupt, durch gegenwärtige Entdeckung Nutzen gestiftet zu haben; so bekenne ich aufrichtig, dass mein Verdienst an der Sache deswegen für gering zu achten ist, weil das Wollen derselben nicht von mir abhing! Nein – eine unsichtbare Macht trieb mich, und liess mich nicht ruhen, bis das Schwere vollbracht – und die Wahrheit gefunden war. Der rechtliche Mann kann daher unmöglich den ehrlichen Finder dieses Kleinodes beneiden, welches derselbe als ein Gemeingut der Menschheit finden musste! Der in der Wissenschaft Eingeweihte kann dies um so weniger, je weniger er sich die Schwierigkeiten zu verhehlen vermag, womit ein Laie bei Vollbringung dieser Riesenarbeit zu kämpfen hatte. Mit innigem Dank wird daher gewiss Jeder dies freundliche Geschenk des Himmels aufnehmen. Zum Schlusse wage ich an die sehr geehrten Academien, welche je Preise auf diesen Gegenstand ausgesetzt haben, die Frage: Ob dem Entdecker dieses Schatzes, welchen derselbe auf den Altar der Wissenschaft niederlegt, nicht einiger Ersatz dafür gebühre? Ob er nicht ein Recht an Preise habe, welche nur unter der Voraussetzung eingezogen wurden, die Sache sei unmöglich? Indem ich als ein Ungelehrter um Nachsicht, Hinsichts der Form meines Vortrages bitte, zeichne mich mit aller gebührenden Hochachtung, als Ihr Diener
>
> Carl Paul Bouche, Berlin, den 16. Dec. 1823.

Bouche hatt diese kleine Schrift 1824 *Sämmtlichen gelehrten Gesellschaften* gewidmet, und möglicherweise war auch die Berliner „Akademie der Wissenschaften“ darunter, die, dem Text folgend, offenbar für den Nachweis der Nichtlösbarkeit dieses Problems einen Preis ausgesetzt hatte. Immerhin wurde dieses Problem in der Mathematik bekanntlich erst 1882 abschließend dadurch gelöst, dass Ferdinand von Lindemann den Beweis der Transzendenz von π erbracht hatte, so dass nun in der Mathematik endlich die zuvor gehegte Vermutung gesichert war, dass die „Quadratur des Kreises“ tatsächlich nicht möglich ist.

Allerdings setzt diese Aussage (und natürlich deren Beweis) voraus, dass eindeutig geklärt ist, was man unter „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“ verstehen *will*, was typisch ist für die Mathematik: Beweise sind nur unter konkret präzisierten Voraussetzungen möglich (Begriffe, Definitionen, bereits bewiesene Aussagen und akzeptierte „Grundwahrheiten“ wie Axiome und Postulate).

Ein Blick in die Geschichte dieser „drei klassischen Probleme der Antike“ und ihre damaligen Lösungsversuche lässt nun dieses Phänomen der unterschiedlichen Sichtweisen eines mathematischen „Problems“ deutlich werden. Insbesondere kann auf diese Weise exemplarisch erkannt werden, dass zwischen einer *„Praktischen Geometrie“* und einer *„Theoretischen Geometrie“* unterschieden werden muss: Während es in der erstgenannten darum geht, mit „handhabbaren“ technischen Instrumenten (wie z. B. Punktierstift, Lineal und Zirkel) konkrete Konstruktionen tatsächlich *„sichtba*r“ durchzuführen, geht es im zweiten Fall darum, Konstruktionen mit nur *„gedachten“* geometrischen Objekten (wie z. B. Punkt, Gerade, Kreis) ebenfalls nur zu *„denken“*.

Die im 19. Jh. bewiesene Unlösbarkeit der drei klassischen Probleme legt also eine solche *Theoretische Geometrie* zugrunde, während die vielfach präsentierten „Lösungen“ meist zu einer *Praktischen Geometrie* gehören. Die Untersuchung ausgewählter antiker Lösungsvorschläge kann aber dazu beitragen, entsprechende Einsichten in das Phänomen „Geometrie“ – nämlich: *Praktische Geometrie vs. Theoretische Geo*metrie – zu gewinnen.

Vorliegende, seit Langem geplante Darstellung wendet sich an alle, die an mathematikhistorischen Fragestellungen und Lösungen interessiert sind, vor allem an alle, die mit Mathematikunterricht zu tun haben oder dieses vorhaben. Die hier vorgestellten Beispiele eignen sich zur Behandlung in mathematischen Proseminaren und auch im gymnasialen Mathematikunterricht der Oberstufe.

Mein großer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Ulrich Felgner, Universität Tübingen, für viele mathematikhistorische Literaturhinweise, Anregungen und Ratschläge während der Entstehung dieses kleinen Buches in den letzten beiden Jahren bis hin zu dessen Fertigstellung. Alle seine Hinweise habe ich wortgetreu als Zitate dokumentiert. Ferner danke ich Herrn Dr. Walter Franzbecker, Hildesheim, für seine spontane Bereitschaft, dieses Werk in seinem Verlag erscheinen zu lassen.

Horst Hischer, im Juli 2015 und im Juni 2018

Inhalt

1 Prolog

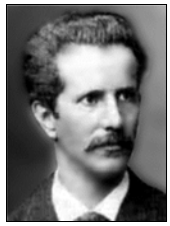


Bild 1.1: Rudio

Ferdinand **Rudio** (1856 – 1929) wurde 1880 bei Ernst Kummer und Karl Weierstraß in Berlin promoviert. Von 1889 bis 1928 war er Ordinarius für Mathematik in Zürich, und hier setzte er sich entscheidend für die Gesamtherausgabe von Leonhards Eulers Werken ein.

Nach den von Charles Hermite 1873 geleisteten Vorarbeiten erbrachte Ferdinand von Lindemann 1882 den Beweis der Transzendenz von π, und schon zehn Jahre später erschien ein Büchlein von Rudio mit dem Titel *„Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung, mit einer Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen“*, mit dem er sich auch an „Mathematiklehrer der Mittelschule“ wendet (sic!) und sogar Lindemanns Beweisidee vorstellt. [1]

Rudio schreibt im Vorwort:

> Zunächst darf ja die erfreuliche Thatsache hervorgehoben werden, daß das Interesse für mathematisch-historische Forschung überhaupt in immer weitere Kreise dringt und daß die Berechtigung, ja die Notwendigkeit historischer Studien auch bei den Fachgenossen immer mehr und mehr Anerkennung findet. Sodann aber dürfte es kaum ein zweites Problem geben, welches sich gerade zur Einführung in das Studium der Geschichte der Mathematik so vortrefflich eignete, wie das Problem von der Quadratur des Zirkels, welches, aus unscheinbaren Anfängen hervorgegangen, im Laufe der Jahrhunderte mit fast allen mathematischen Disziplinen sich derart verkettete, daß schließlich zu seiner Lösung der gesamte Apparat moderner Wissenschaft aufgeboten und entfaltet werden mußte. Endlich hoffe ich noch speziell den Lehrern der Mittelschulen durch die Herausgabe jener nur noch schwer erhältlichen Abhandlungen einen Dienst zu erweisen.

ARCHIMEDES,
HUYGENS, LAMBERT, LEGENDRE.

VIER ABHANDLUNGEN ÜBER DIE KREISMESSUNG.

DEUTSCH HERAUSGEGEBEN
UND MIT EINER
ÜBERSICHT ÜBER DIE GESCHICHTE DES PROBLEMES
VON DER
QUADRATUR DES ZIRKELS,
VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS AUF UNSERE TAGE,
VERSEHEN VON
DR. F. RUDIO,

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

Bild 1.2: Titelseite zu Rudios Buch

In § 1 äußert sich Rudio „Über die Ursachen der Berühmtheit des Problemes“:

> Unter allen mathematischen Problemen, die im Laufe der Jahrhunderte die Menschheit beschäftigt haben, ist keines zu einer so großen Popularität gelangt, wie das Prob-

[1] [Rudio 1892]; 1907 ließ Rudio das Büchlein „Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates“ (Übersetzung aus dem Griechischen mit Kommentar) folgen. Rudio übersetzte auch Archimedes‘ „Kreismessung“, die in [Archimedes 1972] wiedergegeben ist.

> lem von der Quadratur des Zirkels. Die Quadratur des Zirkels suchen ist geradezu eine sprüchwörtliche Redensart geworden, welche so viel bedeutet als: etwas höchst schwieriges, oder gar unmögliches und darum müßiges unternehmen. Unter allen mathematischen Problemen hat auch keines ein höheres Alter aufzuweisen, als das in Rede stehende, denn die Geschichte dieses Problemes umfaßt einen Zeitraum von rund 4 000 Jahren, ist also so alt wie die Geschichte der menschlichen Kultur. [15]
>
> Fragt man nun, worin denn die große Berühmtheit gerade dieses speziellen mathematischen Problemes begründet ist, so wird sich eine völlig befriedigende Antwort allerdings nur aus der Geschichte des Problemes selbst gewinnen lassen. Denn man kann nicht behaupten, daß das Problem an und für sich, herausgerissen aus dem Zusammenhange mit den vielen andern mathematischen Fragen, die sich im Laufe der Zeit mit jenem verknüpft haben, für die Wissenschaft oder ihre Anwendungen diejenige große Bedeutung besitze, die ihm von Fernerstehenden vielfach zugesprochen worden ist. Es hat viel wichtigere, wissenschaftlich interessantere und praktisch wertvollere Probleme gegeben, die auch eine Jahrhunderte lange Geschichte aufzuweisen haben und die doch niemals in das große Publikum gedrungen sind. [...]
>
> Das Problem von der Quadratur des Zirkels ist vielmehr aus meist sehr trivialen Gründen zu seiner großen Berühmtheit gelangt. Zunächst gehört es zu den sehr wenigen mathematischen Problemen, die nur ausgesprochen werden müssen, um auch sofort von jedem verstanden zu werden. [2] Jeder weiß oder glaubt wenigstens zu wissen, was man unter dem Flächeninhalte einer begrenzten Figur zu verstehen habe, und jedem erscheint es daher als eine sehr einfache, leicht verständliche Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, dessen Flächeninhalt genau gleich demjenigen eines gegebenen Kreises sei. Der Umstand nun, daß eine scheinbar so einfache Aufgabe doch den Anstrengungen der größten Geister den hartnäckigsten Widerstand entgegensetzte, hat von jeher eine eigentümliche Anziehungskraft ausgeübt auf die Mathematiker und vielleicht auch noch mehr auf die Nichtmathematiker, denen ja doch das Geheimnis der Fragestellung meist verborgen blieb.

Derselbe Verlag ließ 1913 eine neue Fassung zur Quadratur des Kreises folgen, und zwar von Eugen Beutel, einem Oberreallehrer an der Latein- und Realschule in Vaihingen-Enz, der sich an Rudios Werk anlehnt und im Vorwort schreibt:

> Mögen sich durch die Lektüre dieser Schrift zahlreiche Leser bewogen fühlen, sich eingehender mit dem Studium der Geschichte der Mathematik zu befassen, die ja auch neuerdings an den höheren Schulen mehr und mehr die ihr gebührende Beachtung findet.

1927 erschien (wiederum bei Teubner) ein neues Büchlein zu einem anderen historischen mathematischen Problem unter dem Titel *„Das Delische Problem. Die Verdoppelung des Würfels"*. Es wurde von Aloys **Herrmann** (1898 – 1953) verfasst, [3] der 1949 zu einem der Gründungsprofessoren des Mathematischen Instituts an der Universität des Saarlandes berufen wurde.

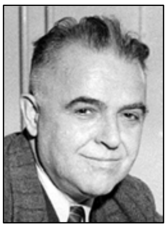


Bild 1.3:
Aloys Herrmann

2 Hier provoziert Rudio wohl bewusst aus didaktischen Gründen.

3 [Herrmann 1927, 4]; Bild 1.3 wurde freundlicherweise von Dr. Wolfgang Müller vom Universitätsarchiv der Universität des Saarlandes zur Verfügung gestellt.

Während Rudios Büchlein wohl die erste historisch umfassende Darstellung des Problems von der Quadratur des Kreises ist, das sich an Lehrer und Studienanfänger richtet, gilt dies ähnlich für Herrmanns Büchlein bezüglich des Delischen Problems, wobei auch er sich sogar expressis verbis an Schüler wendet, wie er im Vorwort schreibt:

> Dieses Büchlein wendet sich in erster Linie an die Schüler der oberen Klassen höherer Lehranstalten. Das Problem von der Würfelverdoppelung schien mir besonders gut dazu geeignet, zu zeigen, daß die Mathematik nicht eine Sammlung starrer Formeln darstellt, sondern mit Leben erfüllt ist. Es lag in meiner Absicht, unter Berücksichtigung historischer Momente zunächst durch die Behandlung einzelner Fragen algebraischer und geometrischer Natur Grundlagen zu schaffen, um dann gegen Schluß eine Synthese vorzunehmen, die ihren Ausdruck in dem Unmöglichkeitsbeweis der Lösung des Problems findet. Möge dieses kleine Heftchen dazu beitragen, besonders bei den jungen Lesern, das Interesse an der reinen Mathematik zu wecken und zu fördern!


MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
68

DAS DELISCHE PROBLEM
(DIE VERDOPPELUNG DES WÜRFELS)
VON
DR. ALOYS HERRMANN

1927
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

Bild 1.4: Titelseite Herrmann

Diese Haltung Herrmanns verdient übrigens deshalb besondere Beachtung, weil er vor seinem Ruf an die Universität des Saarlandes u. a. in Dessau und Paris in der Luftfahrtforschung tätig war und damit also wesentlich mit Fragen der Angewandten Mathematik befasst war.

Schließlich ist noch Walter **Breidenbach** zu nennen, einer der wenigen „ersten“ Professoren für Mathematik und ihre Didaktik, der 1933 bei Teubner das Büchlein über „Die Dreiteilung des Winkels“ folgen ließ. Er beginnt die Einleitung wie folgt:

> Von den mathematischen Problemen, welche bereits die Griechen behandelten, sind vor allem drei berühmt geworden: die Quadratur des Kreises, das ist die Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, das einem gegebenen Kreis flächengleich ist; die Verdoppelung eines Würfels, d. h. zu einem gegebenen Würfel den Würfel von doppeltem Volumen zu finden; die Dreiteilung eines gegebenen Winkels.

1953 erschien bei Teubner ferner eine von Breidenbach verfasste völlige Neubearbeitung von Herrmanns damals bereits vergriffenem Buch über das Delische Problem.


MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK
REIHE I
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
78

DIE DREITEILUNG DES WINKELS
VON
WALTER BREIDENBACH
MIT 43 FIGUREN

1933
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

Bild 1.5: Titelseite Breidenbach