

Vorwort

Anlass

Dass dieses Buch ein solches werden sollte, war nicht beabsichtigt: So ging es im Sommer 2008 zunächst nur um die Vorbereitung auf einen Vortrag zu dem vieldeutigen Tagungsthema „Medien vernetzen“. * Es zeigte sich dann bereits im Laufe der mit dieser Vorbereitung verbundenen „Abenteuerreise“ ohne „Reiseführer“, insbesondere aber auch in der auf die Tagung folgenden Phase der Nachbereitung, dass über jene *aktuellen*, mit dem o. g. Thema assoziierbaren Aspekte hinaus etliche *zeitlose* Strukturen auftauchen und zu erfassen sind, die weder in einem ausgearbeiteten Tagungsbeitrag noch in einem üblichen Journalbeitrag angemessen darstellbar sind und eine ausführlichere Behandlung nicht nur nahe legen, sondern vielmehr sogar erfordern. Darüber hinaus zeigte sich in dem Rahmen schließlich, dass das Thema „Vernetzung“ in Gestalt sog. „Netzwerke“ in den Sozialwissenschaften, in der Physik, in der Biologie, in der Informatik und in der Angewandten Mathematik *hochaktuell* ist und in den letzten rund fünfzehn Jahren zur Entstehung der sog. „Netzwerkanalyse“, einer neuen transdisziplinären Forschungsdisziplin, geführt hat, die wohl nicht ohne Einfluss auf künftige Forschungsaktivitäten in der Didaktik und in der Pädagogik bleiben dürfte. „Medien“, „Netze“ und „Vernetzung“ gehören zwar allenthalben zum Sprachjargon in Politik und Presse, aber auch in der Wissenschaft: „Medien“ spielen in den Bildungswissenschaften – und hier vornehmlich in der medienpädagogischen Forschung – eine wichtige Rolle, und sie werden u. a. auch in der Didaktik der Mathematik angesprochen, wenn auch meist nicht in der ihnen gebührenden Rolle eines Fachbegriffs, sondern dann eher in der eines „selbstredenden“ Alltagsbegriffs. Für den Terminus „Vernetzen“ gilt Ähnliches: Er erfreut sich zunehmender Beliebtheit bei der Beschreibung von Unterrichtszielen und Bildungskonzepten (auch in der Didaktik der Mathematik), und dennoch scheint er wegen fehlender inhaltlicher Analyse bisher fachlich nicht definiti-

* Hauptvortrag am 27.09. 2008 auf der Herbsttagung 2008 des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM).

onswürdig zu sein und also (noch?) nicht die Rolle eines für diese Disziplin wichtigen fachwissenschaftlichen Begriffs zu spielen. In diesem Buch wird zunächst der Versuch einer Klärung bzw. Sammlung bereits vorliegender pädagogisch bzw. didaktisch orientierter fachwissenschaftlicher Begriffsinterpretationen („Medium“) bzw. auch „alltagsüblicher“ Deutungen, Bedeutungen und Verwendungszusammenhänge (vor allem: „Netz“, „Vernetzen“ und „Vernetzungen“) vorgenommen, um daraus zu für den (mathematik-)didaktischen Kontext zweckmäßigen Begriffsbestimmungen wie „vernetzender Unterricht“ zu gelangen und diese zur Diskussion zu stellen.

Medien

Zum Thema „Medien“ kann für den pädagogisch-didaktischen Kontext bereits auf eine reichhaltige Literatur zurückgegriffen werden, die allerdings aus der fachspezifischen Sichtweise und Sozialisation der Mathematik und ihrer Didaktik nicht für jedermann stets leicht zugänglich wirken mag. Hier wurde nun der Versuch einer Synopse mit der Konzentration auf Wesentliches und der Strukturierung in neuer Sichtweise unternommen, wobei es sicherlich für manche Leserinnen und Leser überraschend sein dürfte, als wie umfassend und weit sich der Begriff „Medium“ bereits in diesem Kontext erweist. Schließlich sind folgende wesentliche Aspekte festzuhalten: Medien begegnen uns sowohl in einer „engen Auffassung“ (als sog. *technische Medien*) als auch in einer „weiten Auffassung“, und bei der letztgenannten Auffassung sind folgende Rollen hervorzuheben: Medien als *Vermittler von Kultur*, als *dargestellte Kultur*, als *Werkzeuge oder Hilfsmittel zur Weltaneignung*, als *künstliche Sinnesorgane* und als *Umgebungen bei Handlungen*. Das lässt sich mit Bezug auf Kron wie folgt zusammenfassen: *In und mit Medien setzt der lernende und erkennende Mensch seine Welt und sich selbst in Szene*. Damit kann dann die oft nebulös verwendete Bezeichnung „Lernumgebung“ sinnvoll als ein Medium gedeutet werden.

Netze

Ganz anders stellt sich das Themenfeld „Netze und Vernetzungen“ dar, das im pädagogisch-didaktischen Kontext eher einem unbestellten Acker gleicht. Hier war aus subjektiver Sicht Neuland der Didaktik zu betreten, was jedoch nicht ausschließt, dass andere es schon zuvor erblickt oder gar erschlossen haben. Dabei zeigte sich

einerseits, dass zunächst der mit der Bezeichnung „Netz“ verbundene Begriff in diesem Kontext einer Klärung bedarf: Solche Netze erweisen sich in ihrer Zusammensetzung aus *Bestandteilen* (Knoten und Kanten), *Benutzern* und *Betrachtern* und den damit einhergehenden vielfältigen Verbindungen und Beziehungen als sehr komplexe Gebilde, die nicht einfach nur als „normale“ Graphen (mit besonderen Eigenschaften) aufgefasst werden können. Daher wird ein verbales Axiomensystem für „Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext entwickelt und vorgestellt, das für die Beschreibung dieser komplexen Strukturen hinreichend allgemein erscheint. Gleichwohl bieten sich (sog. „einfache“) Graphen zur strukturellen Beschreibung der *Bestandteile von Netzen* (nämlich: der „Knoten“ und ihrer „Verbindungen“, genannt „Kanten“) an, denn man kann ggf. verschiedene solcher Graphen überlagern und damit dann wohl *ohne Mehrfachkanten* auskommen. Die (ebenfalls vielfältig denkbaren) Beziehungen der *Benutzer* zu den Knoten der Bestandteile (oder auch zu deren Verbindungen) und der Benutzer untereinander lassen sich ggf. durch weitere Graphen beschreiben. Hinzu kommen noch Beziehungen der *Betrachter* untereinander, zu den Benutzern und zu den Bestandteilen, so dass diverse Graphen vorliegen können, die insgesamt in ihrer Überlagerung ein *Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext* ausmachen. Daher werden zunächst spezielle Graphen für das *graphentheoretisch „Innerste“ der Netze* (nämlich ihre *Bestandteile*) axiomatisch charakterisiert. Im idealtypischen Fall sind das dann sog. „Netzgraphen“, verallgemeinert sind es „Netzwerke“.

Netzgraphen und Netzwerke

Typisch für „Netze“ im Alltagsverständnis ist u. a. das Vorhandensein von *Maschen*, in denen sich die „Benutzer“ verfangen können, die aber auch deren Schutz dienen können. „Bäume“ sind damit stets nicht „vernetzt“. Das führt schließlich nach mehreren Modellierungsansätzen zu der Idee, einen „Netzgraphen“ als endlichen, zusammenhängenden Graphen aufzufassen, bei dem jede Kante „Teil einer Masche“ ist, ergänzt durch die sinnvolle Zusatzforderung, dass jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat. Das hat (als wesentliches Merkmal für „Vernetzung“!) zur Folge, dass *zwischen je zwei Knoten stets mindestens zwei verschiedene Wege* existieren. Entfernt man sukzessive einzelne Kanten aus einem Netzgraphen, so

kann zwar zunächst noch ein Netzgraph vorliegen, jedoch „kippt“ die Lage plötzlich, so dass dann kein Netzgraph mehr vorliegt, aber dieser Graph „noch“ kein Baum ist, weil noch mindestens eine Masche existiert (oder er nicht mehr zusammenhängend ist). So wird man ggf. auch derartige Graphen noch in gewissem Sinn als „vernetzt“ ansehen (können), allerdings mit folgender Konsequenz: Das (idealtypische) „Vorliegen eines Netzgraphen“ und das „Vorliegen einer Vernetzung“ bedeuten nicht dasselbe. Das o. g. „graphentheoretisch Innerste eines Netzes“ kann also im Idealfall ein Netzgraph sein, soll hier aber, um stets ansprechbar zu sein, im allgemeinen Fall „Netzwerk“ genannt werden. Ein Netzwerk ist damit dann der aus den Bestandteilen eines Netzes (s. o.) gebildete Graph, der ggf. ein Netzgraph ist, der aber dennoch eine „Vernetzung“ zum Ausdruck bringen kann, die in geeigneter Weise zu messen ist.

Vernetzungsgradmaße

So liegt es nahe, neben dem „Vorliegen eines Netzgraphen“ als einem *qualitativen Maß* für die Vernetzung auch ein *quantitatives Maß* einzuführen, genannt „Vernetzungsgrad“. Die „reine“ mathematische Graphentheorie hat zwar umfassend sog. „Bäume“ untersucht, ihr Augenmerk galt aber bisher weder Netzgraphen im hier vorgestellten Verständnis noch Vernetzungsgradmaßen in einem für die Anwendung nützlichen Sinn. Anders ist es jedoch in den Anwendungsdisziplinen, insbesondere in Physik und in Soziologie, zunehmend aber auch in Angewandter Mathematik und in Informatik, anscheinend jedoch (noch) nicht in Didaktik und in Pädagogik:

In der neuen, „Netzwerkanalyse“ genannten, Disziplin werden zwar keine idealtypischen „Netzgraphen“ untersucht, wohl aber die Struktur „natürlich entstehender Netzwerke“, und in dem Zusammenhang wurden auch unterschiedliche Vernetzungsgradmaße vorgeschlagen und für die Untersuchung solcher Netzwerke herangezogen, und zwar beispielsweise und insbesondere: *mittlerer Knotenabstand*, *Clusterkoeffizient*, *mittlerer Knotengrad* und *Durchmesser* des Graphen. Diese und weitere Vernetzungsgradmaße sind sog. „Netzwerkstatistiken“, und sie messen je unterschiedliche Eigenschaften. Es sind globale Maße, denen oft lokale zugrunde liegen. In ihrer Gesamtheit und Verschiedenartigkeit können sie zur Beurteilung der jeweils konkreten „Vernetzungsgüte“ herangezogen werden.

Modellierung realer Netzwerke

„Natürliche“ Netzwerke entstehen i. d. R. nicht planmäßig, sondern unter stochastischen Bedingungen. Die ersten Untersuchungen solcher „Zufallsgraphen“ waren rein graphentheoretischer Natur. Bei dem auf Erdős und Rényi (1959) zurückgehenden *ER-Modell* werden vorhandene Knoten zufallsbedingt durch Kanten verbunden. Dieses Modell konnte jedoch das Auftreten sog. „Kleiner Welten“ („Small Worlds“), wie man sie z. B. bei der *Erdős-Zahl* oder beim *Kevin-Bacon-Orakel* kennt, nicht gut erklären.

Eine neue Phase in der mathematischen Modellierung realer Netzwerke wurde durch das 1998 von Watts und Strogatz präsentierte *WS-Modell* eingeleitet: Hier werden vorhandene Kanten eines gegebenen regulären Graphen zufallsgesteuert nur „neu verdrahtet“. Damit konnte zwar das Entstehen „Kleiner Welten“ erklärt werden, nicht jedoch das Entstehen von sog. „Naben“ in realen Netzwerken: Sehr wenige Knoten des Netzwerks weisen hier einen extrem hohen Grad auf (mit sehr vielen Verbindungen zu anderen Knoten). Daraufhin stellten Barabási und Albert 1999 alternativ ihr *BA-Modell* vor, das durch *dynamisches Wachstum* und *bevorzugendes Andocken* gekennzeichnet ist, denn reale Netzwerke wachsen nämlich durch Entstehung *sowohl* neuer Kanten *als auch* neuer Knoten: So „dockt“ bei dem BA-Modell jeder *neue* Knoten nach dem „Matthäus-Effekt“ zufallsbedingt an *vorhandenen* Knoten durch *Bildung neuer Kanten* an, wobei die bereits „reichen“ Knoten bevorzugt werden („rich get richer“). Damit ist dann auch die *Entstehung von Naben erklärbar*. Insbesondere zeigt sich in Übereinstimmung mit dem BA-Modell und empirischen Untersuchungen (z. B. sowohl beim Internet als auch beim WorldWideWeb): Die *zufällige Zerstörung* einer geringen Anzahl von Knoten betrifft faktisch keine Naben, und damit ändert sich der mittlere Knotenabstand nicht, der hingegen bei *gezielten Angriffen* auf Naben dramatisch zunimmt.

Vernetzung – Vernetzender Unterricht

„Vernetzung“ ist nicht nur ein Zustand, sondern auch ein Prozess, der ggf. durch eines der genannten Modelle beschreibbar ist und der im optimalen Fall einen Netzgraphen liefert, im Normalfall jedoch „nur“ ein Netzwerk, dessen jeweils gewählter „Vernetzungsgrad“ ein Maß für eine mehr oder weniger ausgeprägte Vernetzung

bildet. Für unterschiedliche Situationen bzw. Stadien werden daher verschiedene Bezeichnungen eingeführt: *Verbindung*, *Verzweigung*, *schwache Vernetzung*, *starke Vernetzung*, *Vernetzung*, *Teilvernetzung*. Sind je zwei Knoten eines endlichen Graphen verbunden (ist der Graph also zusammenhängend), so ist er entweder *verzweigt* oder *vernetzt*: Es liegt dann entweder ein Baum oder ein vernetzter Graph vor, *Bäume* sind somit *nicht vernetzt*.

In diesem Sinne führt ein „*Vernetzender Unterricht*“ zu Aufgaben für die *Betrachter* (insbesondere die Lehrpersonen) in Bezug auf die Betreuung der *Benutzer* (insbesondere die Schülerinnen und Schüler) bei deren Umgehen mit den *Bestandteilen* (wie etwa Ideen, Vermutungen, Definitionen, Sätzen, Beispielen und Zusammenhängen).

Medien und Vernetzung – Vernetzung als Medium

„*Vernetzendes Denken*“ (aufgefasst als ein Prozess des Vernetzens) erweist sich als ein Werkzeug oder Hilfsmittel zur Weltaneignung. Es liegt damit ein *Medium in der weiten Auffassung* vor, womit sich „*Vernetzendes Denken*“ als eine *Umgebung* für den lernenden und erkennenden Menschen erweist, also als eine „*Lernumgebung*“, und so erscheint schließlich „*Vernetzung als Medium zur Weltaneignung*“.

Zum Stil dieses Buches

Typisch für den Stil dieses Buches ist die hermeneutische Vorgehensweise, die also durch einkreisendes und dabei im Prozess des Entdeckens und Erkennens zunehmend vertiefendes und durchaus erneut aufgreifendes und wiederholendes Herangehen gekennzeichnet ist. Dies ist zunächst der Tatsache geschuldet, dass beim Beginn des Schreibens dieses Buches noch gar nicht erkennbar war, wohin die Reise geht und welche Ergebnisse sich zeigen werden, sogar: ob überhaupt berichtenswerte Ergebnisse zu erwarten sind. Andererseits ist eine solche Vorgehensweise oft typisch für forschendes Tun – nicht nur in den Geisteswissenschaften, sondern auch in der Mathematik – jedoch wird ein solcher Weg der Erkenntnisgewinnung nur selten mitgeteilt, insbesondere meist nicht in der Mathematik. Bei solch einer Vorgehensweise bleibt es nicht aus, dass dynamisch innere Widersprüche entstehen, die nicht sofort offenbar werden und von denen ich hoffe, dass es mir gelungen ist, sie aufzulösen. Das mathematikhaltige Kapitel 4 könnte man zwar auf sehr wenigen Seiten nach dem mathematiküblichen Schema

„Definition – Satz – Beweis – Beispiel“ abhandeln, dabei zugleich noch mehr Theoreme unterbringen. Aber das war nicht das Ziel. Vielmehr sollte nachgezeichnet werden, wie sich die Vorstellungen tastend und sukzessive entwickelt haben. So werden Axiomensysteme und Definitionen nicht nur vorgestellt und analysiert, sondern es wird der steinige Weg zu ihrer Entdeckung bzw. Erfindung mit den zugehörigen Irrwegen ausführlich dargestellt. Insbesondere kann die Vorgehensweise in den Kapiteln 3 und 4 im Sinne aktueller Modeströmungen durchaus auch als „Modellierung“ aufgefasst werden, wobei zugleich der leider vielfach in Vergessenheit geratene *Modellbegriff der Strukturmathematik* eine wichtige Rolle spielt. Das *gesamte Buch* hat den *Charakter einer strukturierten Dokumentation* der sich über einen längeren Zeitraum erstreckenden Erkenntnisgewinnung. Es stellt – aus subjektiver Sicht – einen ersten Anlauf zur Untersuchung der bildungstheoretischen und unterrichtspraktischen Bedeutung von „Medien“ und „Vernetzung“ in ihren Zusammenhängen dar, verbunden mit dem *Wunsch*, damit eine *fruchtbare fachdidaktische Diskussion in Gang zu setzen*.

Aktualität

Kurz vor Drucklegung dieses Buches entdeckte ich das im März 2010 erschienene, 772 Seiten umfassende Buch „*Networks. An Introduction*“ von Mark E. J. Newman. Es ist das erste synoptische Werk über die Entstehung und die Struktur realer Netzwerke, und es bietet einen vorzüglichen Überblick über das junge Forschungsgebiet der „Netzwerkanalyse“ und die Ergebnisse der letzten knapp zwanzig Jahre. Es sei bezüglich des Themenbereichs „Netzwerkanalyse“ empfohlen, steht aber ansonsten nicht in Konkurrenz zum hier vorliegenden Buch, weil es einem ganz anderen Anliegen dient.

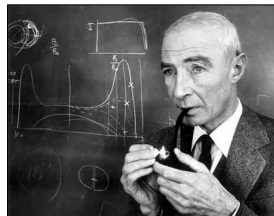
Danksagungen

Ich danke dem Verlag für die Veröffentlichung dieses Buches und die dabei angenehme Zusammenarbeit, Prof. Dr. Anselm Lambert danke ich für die Einladung zu dem für die Entstehung dieses Buches „verantwortlichen“ Vortrag (vgl. die Fußnote auf S. III), und meiner Frau Ingeborg danke ich dafür, in dem langen Zeitraum des Recherchierens, Durchdenkens und Schreibens meine dadurch bedingte häufige Zurückgezogenheit geduldig mitgetragen zu haben.

Horst Hischer, im August 2010

Alle Wissenschaften entstehen aus gesundem Menschenverstand, aus Wißbegierde, Beobachtung und Überlegung. Man beginnt damit, daß man seine Beobachtungen und seine Worte verfeinert und die Dinge über die Abläufe des alltäglichen Lebens hinaus erforscht und weitertreibt. Bei dieser Neuerung gibt es Überraschungen; man revidiert seine Betrachtungsweise der Dinge, um sich den Überraschungen anzupassen; dann wird die alte Denkart so beschwerlich und unangemessen, daß man die Notwendigkeit einer großen Änderung einsieht, und dann erneuert man seine Denkart über diesen Teil der Natur. Durch all das lernt man zu erklären, was man getan hat, was man herausgefunden hat, und geduldig zu sein und auf andere zu warten, um zu sehen, ob sie dieselben Feststellungen machen, und um das normalerweise überwältigend starke Element der Zweideutigkeit in der menschlichen Sprache bis auf den Punkt zu verringern, wo es nichts mehr ausmacht. Wir leben durch das Zweideutige, durch das Nicht-Entscheiden von Fragen, weil sie nicht entschieden werden müssen, die Andeutung von mehr als einer Sache, weil ihre Mitgegenwart im Bewußtsein vielleicht eine Quelle von Schönheit sein könnte. Wenn wir über Wissenschaft reden, können wir so zweideutig sein wie immer, bis wir zum Kern der Sache kommen. Dann erklären wir einem Kollegen genau, was wir gemacht haben, in Begriffen, die ihm verständlich sind, weil er geschult worden ist, sie zu verstehen. Wir beschreiben ihm ganz genau, was wir festgestellt haben und wie wir es gemacht haben. Wenn er uns nicht versteht, dann besuchen wir ihn und helfen ihm; und wenn er uns immer noch nicht versteht, gehen wir zurück nach Hause und machen es noch einmal. Auf diese Dinge gründet sich die Festigkeit und Zuverlässigkeit der Wissenschaft.

*Julius Robert Oppenheimer,
Theoretischer Physiker, aus:
Über Wissenschaft und Kultur (1962)*



Während ich mein Buch
der Öffentlichkeit übergebe,
beschleicht mich die Furcht,
daß es viele trotz all der Arbeit,
die darin steckt, für eine unzureichend
belegte Improvisation ansehen könnten.
Es ist aber nun einmal das Los eines Autors,
der Kulturprobleme behandeln will,
sich zuweilen
auf manch ein Gebiet wagen zu müssen,
das er nicht genügend beherrscht.
Alle Wissenslücken erst noch auszufüllen
war für mich ausgeschlossen,
und mit dem Einstehen für ein jedes Detail
durch ein Zitat habe ich es mir leicht gemacht.
Es hieß für mich:
jetzt schreiben oder gar nicht schreiben.
Schreiben über etwas, was mir am Herzen lag.
Also habe ich geschrieben.

*Johan Huizinga,
niederländischer Historiker, aus:
Homo Ludens – Vom Ursprung der Kultur im Spiel
(1938/1987)*



Inhalt

1	Einleitung	1
1.1	Richard Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen?	1
1.2	Dedekind, Medien und Vernetzungen	3
1.3	Ein kaum zeitloser Blick in die Fachliteratur	5
2	Medien – eine Begriffsbestimmung im pädagogisch-didaktischen Kontext	10
2.1	Medien, Kultur und Enkulturation	10
2.1.1	„Medien“ im naiven (Alltags-)Verständnis	10
2.1.2	„Medium“ im bildungswissenschaftlichen Fachverständnis gemäß Kron	13
2.1.3	„Kultur“ im naiven (Alltags-)Verständnis	14
2.1.4	„Kultur“ im bildungswissenschaftlichen Verständnis gemäß Herskovits und Loch	19
2.1.5	Enkulturation	20
2.1.6	„Im Medium von ...“ als ein weiterer Aspekt: „Medium als Umgebung“	22
2.2	„Medium“ als <i>Genus verbi</i> im Griechischen	26
2.3	Medien als Werkzeuge zur Weltaneignung und als künstliche Sinnesorgane	30
2.4	Medien: enge Auffassung versus weite Auffassung	32
2.5	Ein Blick auf aktuelle technische Medien	35
2.6	Neue Medien	36
2.7	Neue Medien – Werkzeug oder Hilfsmittel?	37
2.8	Medienpädagogik	39
2.9	Integrative Medienpädagogik	42
2.10	Rückblick und Ausblick	45
3	Netze und Vernetzungen – eine Begriffsbestimmung im pädagogisch-didaktischen Kontext	46
3.1	Bewusst subjektive Vorbetrachtungen	46
3.2	„Netz“ und „Vernetzen“ – eine <i>Bedeutungssammlung ab ovo</i>	49
3.3	„Netzwerk“ – eine überflüssige oder falsche Bezeichnung?	54
3.4	Was sind und was sollen Netze und Vernetzungen? – Stufen der Abstraktion durch Gruppierung und Reduzierung	59

3.5	„Netz“: eine axiomatisch orientierte Begriffsbestimmung	64
3.5.1	Vorbemerkungen	64
3.5.2	Ein verbales Axiomensystem für „Netz“	66
3.5.3	Kritische Fragen und Anmerkungen zur Begriffsbestimmung von „Netz“	72
3.5.3.1	„Vernetzendes Denken“ oder „vernetztes Denken“?	72
3.5.3.2	„Vernetzendes Denken“: Fähigkeit oder Fertigkeit?	72
3.5.3.3	Formale Definition von „Netz“? – „System“ als Alternative zum „Netz“?	76
3.5.3.4	„Systemtheorie“ oder „Netzwerkanalyse“ in der Soziologie? – soziale Netzwerke	78
3.5.3.5	Fazit: Angemessenheit von „Netz“ statt „System“ im pädagogisch-didaktischen Kontext!	81
4	„Netzgraph“ oder „Netzwerk“ als graphentheoretischer Teil von „Netz“?	82
4.1	Vorbemerkung	82
4.2	„Netz“ und „Netzwerk“ in der Mathematik	83
4.3	Graphentheorie: Grundlegende Definitionen	89
4.4	„Netzgraph“ – erste axiomatische Ansätze	93
4.5	Definition von „Netzgraph“	97
4.6	Die Lösung: „Netzwerk“ als graphentheoretischer Teil von „Netz“	108
5	„Vernetzungsgrad“ als Maß für die Güte einer Vernetzung	110
5.1	Wozu zusätzlich noch ein Vernetzungsgrad?	110
5.2	Beispiele für Vernetzungsgradmaße	115
5.2.1	Mittlerer Knotenabstand	115
5.2.2	Ballung („Clusterbildung“)	119
5.2.3	Alternative Definitionen des Clusterkoeffizienten	124
5.2.3.1	Graphische Deutung über „Tripel“ und „Dreiecke“	124
5.2.3.2	„Transitivität“ als Alternative zum Clusterkoeffizienten	126
5.2.3.3	„Dichte“ als Vorläufer des Clusterkoeffizienten	127
5.2.3.4	Eine exotische Auffassung von „Clusterkoeffizient“?	127
5.2.4	Mittlerer Knotengrad und Dichte	129
5.2.5	Durchmesser	130
5.2.6	Vernetzungsgradmaße: exemplarischer Vergleich	134
5.3	Vernetzungsgrad und die Erdős-Zahl	138

6	Netze und Vernetzungen: ein Blick in den Forschungsstand jenseits von Pädagogik und Didaktik	146
6.1	Vorbemerkung	146
6.2	Das Kevin-Bacon-Orakel	149
6.3	Small Worlds oder: Kleine Welten	151
6.4	„Skaleninvariante Netzwerke“ – „Zufallsgraphen“ anderen Typs	158
6.5	Fehlertoleranz und Stabilität von Netzwerken	167
6.6	Zusammenfassung und Ergänzungen	174
7	Netze und Vernetzungen im pädagogisch-didaktischen Kontext: vorläufige Bilanz und Ergänzungen	179
7.1	Rückblick auf die Kapitel 3 bis 6	179
7.2	„Kausalketten“ und „Baumstrukturen“ als Gegenbeispiele für „Vernetzungen“	181
7.3	Das „Netz-Dilemma“	185
7.4	Ausblick: gerichtete Netzgraphen und Multi-Netzgraphen	187
7.5	Zur Spannweite von „Verzweigung“ bis hin zu „starker Vernetzung“	190
7.5.1	Vorbemerkung	190
7.5.2	Verbindung und Verzweigung	190
7.5.3	Starke Vernetzung	191
7.5.4	Schwache Vernetzung	192
7.5.5	Vernetzung	194
7.5.6	Zusammenfassung	196
7.6	Hypertexte und Gewebe	198
8	Vernetzung und (Allgemein-)Bildung: Zusammenhänge und mögliche Ziele	199
8.1	„Bildung im Medium des Allgemeinen“ und „vernetzendes Denken“	199
8.2	Unterrichtsziele, Offenheit und Vernetzung	204
8.3	„Vernetzender Unterricht“ – mögliche Ziele	207
8.3.1	Vorbemerkungen	207
8.3.2	„Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext – Folgerungen für einen „vernetzenden Unterricht“	208

	XV
8.3.3 „Netzgraphen“ und „Vernetzungsgradmaße“ – Folgerungen für einen „vernetzenden Unterricht“	210
8.3.4 „Vernetzender Unterricht“ – Was wird vernetzt?	213
8.3.5 Empirische Befunde der „Netzwerkanalyse“ – Folgerungen für einen „vernetzenden Unterricht“	216
8.3.6 Vernetzung als Prozess im pädagogisch-didaktischen Kontext – Zusammenfassung	217
9 Medien, Vernetzung und Unterricht: mögliche Zusammenhänge	219
9.1 Vorbemerkungen	219
9.2 Medien: einige unterrichtliche Aspekte	220
9.3 Vernetzungen: einige unterrichtliche Aspekte	223
9.4 Medien und Vernetzungen – oder: Vernetzung als Medium zur Weltaneignung	224
10 Literatur	226
11 Register	234

1 Einleitung

1.1 Richard Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen?

Das Vorwort zur ersten Auflage¹ seines Buches „Was sind und was sollen die Zahlen?“ beginnt Richard Dedekind (1831 – 1916) wie folgt:²

Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei Begründung der einfachen Wissenschaft, nämlich desjenigen Theiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen keinesfalls als erfüllt anzusehen.



Abb. 1.1:

Richard Dedekind
im Jahre 1886

Bezüglich der „neuesten Darstellungen“ liest man in einer Fußnote:

Von den mir bekannt gewordenen Schriften erwähne ich das verdienstvolle Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von E. Schröder [...] und außerdem die Abhandlungen von Kronecker und Helmholtz über den Zahlbegriff [...]. Das Erscheinen dieser Abhandlungen ist die Veranlassung, welche mich bewogen hat, nun auch mit meiner [...] Auffassung hervorzutreten [...].

Dedekind nennt Schröders Buch „verdienstvoll“ und zeigt sich mit „außerdem“ zugleich gegenüber den anderen beiden Abhandlungen reserviert, wobei er sich mit dem Hinweis auf die „Abhandlung von Kronecker“ vermutlich³ auf dessen bekannte Aussage bezieht:

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,
alles andere ist Menschenwerk.

¹ Und auch das zur dritten, hier zitierten Auflage [Dedekind 1911, VII].

² Abb. 1.2 zeigt das Titelblatt der dritten Auflage, die Erstauflage erschien 1887 bei Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Der griechische Satz auf dem Titelblatt lautet transkribiert „*aei ho anthropos arithmetizei*“, was so viel bedeutet wie „zu allen Zeiten (*aei*) rechnet (*arithmetizei*) der (*ho*) Mensch (*anthropos*)“. Eine gute Eindeutigung ist z. B.: „Der Mensch ist stets mit Mathematik befasst.“

(Mit Dank für diesen Hinweis an meinen Kollegen Prof. Dr. Peter Riemer, Altphilologe an der Universität des Saarlandes.)

³ Günter Asser als Hrsg. im Vorwort zum 2. Nachdruck der zehnten Auflage [Dedekind 1969] (ohne Seitenangabe).

Was sind und was sollen
die
Bahlen?

Von

Richard Dedekind

Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig

Dritte unveränderte Auflage

Ἄει ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητέσει



Braunschweig

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn

1911

Dedekind kontert dann in seinem Werk Kroneckers Auffassung programmatisch: ⁴

Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft [...] sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlen-Reich beziehen. [...]

1.2 Dedekind, Medien und Vernetzungen

Das Forschungs- und Entwicklungsparadigma der Didaktik der Mathematik ist ein grundsätzlich anderes als das der Mathematik, einer ihrer Mutterwissenschaften – so ist sie mitnichten im Sinne von Alexander Israel Wittenberg eine *Wirklichkeit sui generis* wie die Mathematik: ⁵

Mathematik als Erforschung einer Wirklichkeit sui generis und zugleich als Erprobung unseres Denkens [...]

„Wirklichkeit sui generis“ meint hier eine *von Menschen konstruierte Wirklichkeit*, und damit ist die *Mathematik* in dieser Sichtweise *eine aus sich selbst heraus geschaffene Wirklichkeit*, ihre Begriffe sind dann gemäß Dedekinds Formulierung *freie Schöpfungen des menschlichen Geistes*, wobei die Betonung auf „frei“ liegt, was bedeutet, dass sie – etwa im Gegensatz zu Begriffen der Naturwissenschaften – nicht an der „realen Wirklichkeit“ empfunden werden, um diese z. B. zu „modellieren“, sondern dass sie – ganz im Sinne der ursprünglichen lateinischen Bedeutung von „sui generis“ – *von eigener Art* sind. Hingegen sind die von der *Didaktik der Mathematik* – als einer auf den Menschen bezogenen Wissenschaft – verwendeten Begriffe *keine freien Schöpfungen des menschlichen Geistes!*

Gleichwohl lässt sich Dedekinds oben zitierte Auffassung bezüglich Kronecker in analoger Weise auf „Medien“, „Netze“ und „Vernetzen“ bzw. „Vernetzungen“ übertragen, weil (auch!) in der Didaktik

⁴ [Dedekind 1911, VII]; Hervorhebungen nicht im Original.

⁵ [Wittenberg 1990, 51]

der Mathematik – leider – oft sowohl von „Medien“ als auch von „Vernetzen“ usw. in ähnlicher Weise die Rede ist, wie es Dedekind für den Umgang mit dem Zahlbegriff zu seiner Zeit kritisiert.

In diesem Zusammenhang sei an eine berühmte Äußerung von Fritz Erler, dem früheren Fraktionsvorsitzenden der SPD im Deutschen Bundestag, erinnert, die dieser während einer Parlaments-sitzung im November 1965 in Anspielung auf schwammige Äuße-rungen des damaligen Bundeskanzlers Ludwig Erhard machte: ⁶

„Die undeutlichen Formen des Kanzlers sind sehr rezipkativ.“ Ein auf-merksamer CDU-Abgeordneter rief dazwischen: *„Was ist das?“*
Erler: *„Sie fragen, was das heißt, das heißt gar nichts, das spricht sich nur so schön.“*

Und aktuell begegnen wir (z. B.) in der Didaktik der Mathematik auch in weiteren Zusammenhängen „rezipkativen“ Bezeichnungen in der Rolle von „Fachbegriffen“: so etwa, wenn beispielsweise noch immer hartnäckig von „Lernzielen“ gesprochen wird (obwohl es dann meistens nur „Lehrziele“ sind), wenn überschwänglich „Lern-umgebungen“ oder gar „Lernpfade“ erörtert werden (ohne zu prä-zisieren, was dies jeweils sei), oder wenn mit „Bildungsstandards“ leichtfertig der hehre, erst Mitte der 1980er Jahre wieder entdeckte und arrivierte Bildungsbegriff konterkariert wird, weil es sich doch dann allenfalls um *Leistungsstandards* handelt – abgesehen davon, dass „Bildungs-Standard“ als Widerspruch in sich erscheint, weil zur Bildung unverzichtbar *Offenheit* und *Individualität* gehören. ⁷

Daher werden wir zunächst – ganz im Sinne Dedekinds – der Frage nachgehen (müssen), was denn „Medien“ und „Netze“ bzw. „Ver-netzungen“ sind – oder falls das nicht feststehen oder feststellbar sein sollte: was denn hierunter zu verstehen sein soll oder zumin-dest sein könnte, was wir uns also zweckmäßigerweise im Sinne von wissenschaftlichen Basisbegriffen vorstellen *wollen!* – Wobei zu berücksichtigen ist, dass Dedekinds programmatischer Buchtitel so-gar über diese ontologische Frage hinausgeht, indem er fragt, was die Zahlen sollen, welchem Zweck sie also dienen, genauer: wozu man Zahlen braucht, wozu sie nütze sind!

⁶ Vgl. Hamburger Abendblatt vom 30. 11. 1965.

⁷ Vgl. hierzu Abschnitt 8.1, S. 199 f., insbesondere auch S. 202, 205 f.