MaMut

Materialien für den Mathematikunterricht

2

MaMut - Materialien für den Mathematikunterricht 2

Eva-Maria Plackner,
Deborah Wörner (Hrsg.)

Grundlagen fördern

verlag franzbecker

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

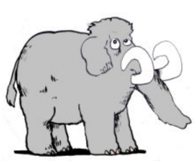
Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data is available in the Internet at <http://dnb.ddb.de>.

Eva-Maria Plackner, Deborah Wörner (Hrsg.)

Grundlagen fördern
MaMut – Materialien für den Mathematikunterricht
Band 2

ISBN 978-3-88120-836-9

Inhalt



Grundvorstellungen

Rudolf vom Hofe

Der vielleicht wichtigste Kritikpunkt an unserem heutigen Mathematikunterricht besteht darin, dass er sich zu sehr an der Vermittlung von Standardverfahren orientiert, während der Erwerb von flexibel anwendbaren mathematischen Fähigkeiten eher zu kurz kommt. Dies bestätigen nicht zuletzt auch die großen internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA. Erschreckender Weise gelten die darin festgestellten Defizite sogar für ganz elementare Fähigkeiten, die man von weiterbildenden Schulen in besonderer Weise erwarten darf. So hat ein erheblicher Teil unserer Schülerinnen und Schüler kein hinreichendes Grundverständnis von Prozentrechnung, ja selbst bei Gymnasiasten zeigen sich hier erstaunliche Schwächen.

Infolge dieser Erkenntnisse ist die Diskussion über eine zeitgemäße mathematische Grundbildung neu aufgeflammt, von den Fachkonferenzen bis hin zur Kultusministerkonferenz. Ihr Ziel ist eine möglichst schnelle und direkte Verbesserung der Schulpraxis, häufig unter dem Schlagwort der *Qualitätssicherung*. Im Zuge dieser Diskussion gibt es mittlerweile eine Fülle von Vorschlägen zum Arbeiten mit neuen Aufgabenformen, Methoden, Medien und Inhalten.

Dabei ist es in der Praxis jedoch häufig unklar, wie man mit der vorhandenen Stoff- und Methodenfülle umgehen soll und wie man daraus – unter Berücksichtigung von Lehrplanvorgaben und knapper Zeit – eine möglichst sinnvolle Auswahl treffen kann. Hierbei stellen sich ganz konkrete Fragen wie: Was versteht man eigentlich unter mathematischer Grundbildung? Was ist hierfür wesentlich bzw. unverzichtbar? Worin liegt der für das Verständnis wichtige Kern eines mathematischen Gebiets? Welche Fähigkeiten und Fertigkeiten müssen hierzu ausgebildet werden? Welche Ideen und welche mathematischen Grundvorstellungen sind dafür erforderlich? Wie muss Unterricht gestaltet werden, der die Ausbildung dieser Ideen und Grundvorstellungen fördert?

In diesem Artikel wird zunächst der Begriff *mathematische Grundbildung* vor dem Hintergrund der aktuellen Diskussion und unter Berücksichtigung der Ergebnisse von TIMSS und PISA geklärt. Im Anschluss daran wird die zentrale Rolle aufgezeigt, welche die *Ausbildung mathematischer Grundvorstellungen* für die Entwicklung einer mathematischen Grundbildung spielt. Dabei werden zahlreiche *Beispiele* für mathematische Grundvorstellungen gegeben. Weiterhin wird über eine neuere empirische Untersuchung berichtet, die sich mit der *längerfristigen Entwicklung* von Grundvorstellungen befasst.

Mathematische Grundbildung

Der Begriff mathematische Grundbildung hat in den letzten Jahren unter dem Einfluss der weltweit wirksamen internationalen Schulleistungsstudien zunehmend eine einheitliche, international weitgehend akzeptierte Form angenommen. Darin wird mathematische Grundbildung nicht über Formelanwendungen oder technische Rechenverfahren definiert, sondern über die Rolle, die der Mathematik als Werkzeug zur Modellierung und geistigen Gestaltung der Umwelt zukommt. So wird bei PISA mathematische Grundbildung in Analogie zur Lesefähigkeit als „mathematical litracy“ beschrieben, und damit als die Fähigkeit,

- die Rolle, die Mathematik in der Welt spielt, zu erkennen und zu verstehen,
- begründete mathematische Urteile abzugeben
- und sich auf eine Weise mit Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürgers entspricht (vgl. PISA 2000, S. 141).

Diese Auffassung von Mathematik orientiert sich am Werk des großen niederländischen Mathematikers und Didaktikers HANS FREUDENTHAL, einem der entschiedensten Vertreter, die es schon lange vor TIMSS und PISA ablehnten, Mathematik lediglich als eine

Aneinanderreihung von Verfahren und Regeln zu vermitteln. Für ihn sind „unsere mathematischen Begriffe, Strukturen und Vorstellungen [...] erfunden worden als *Werkzeuge*, um die Phänomene der natürlichen, sozialen und geistigen Welt zu ordnen.“ (FREUDENTHAL 1983, S. 142)

Damit Lernende etwas von der Kraft und dem Wesen dieser gedanklichen Werkzeuge erfassen, muss sich daher Lehren und Lernen – so FREUDENTHAL – an der Phänomenologie mathematischer Begriffe orientieren und nicht etwa an fertiger Mathematik, an vorgefertigten Sätzen oder Definitionen. FREUDENTHALS Ansatz lässt sich damit beschreiben als ein Plädoyer für einen

- genetischen Mathematikunterricht mit
- aktiv-entdeckendem Lernen in
- inner- und außermathematischen Problemkontexten.

Diese Haltung prägt nicht nur die PISA-Philosophie, sie stellt darüber hinaus einen breiten Konsens der neueren deutschen und internationalen Mathematikdidaktik dar.

Modellbildung

Der Umgang mit Mathematik lässt sich aus dieser Sicht im Wesentlichen als mathematische Modellbildung beschreiben. Die Graphik (Abb. 1; vgl. SCHUPP 1988) illustriert, was damit gemeint ist; sie zeigt zum einen die verschiedenen Schritte, zum anderen den zyklischen Charakter des Modellbildungsprozesses:

Zunächst wird eine Situation aus der realen Welt mathematisiert, d. h. es werden mathematische Begriffe oder Verfahren gesucht, durch die sich die Sachsituation auf der mathematischen Ebene darstellen lässt. Als nächstes werden innerhalb der Mathematik Ergebnisse ermittelt, die dann im Hinblick auf die Sachsituation interpretiert werden. Und schließlich muss überprüft werden, ob diese aus dem mathematischen Modell abgeleiteten Konsequenzen tatsächlich für die Lösung des Sachproblems geeignet sind, oder ob ein neuer Durchlauf in diesem Zyklus – möglicherweise mit einem anderen und besseren mathematischen Modell – erforderlich ist.

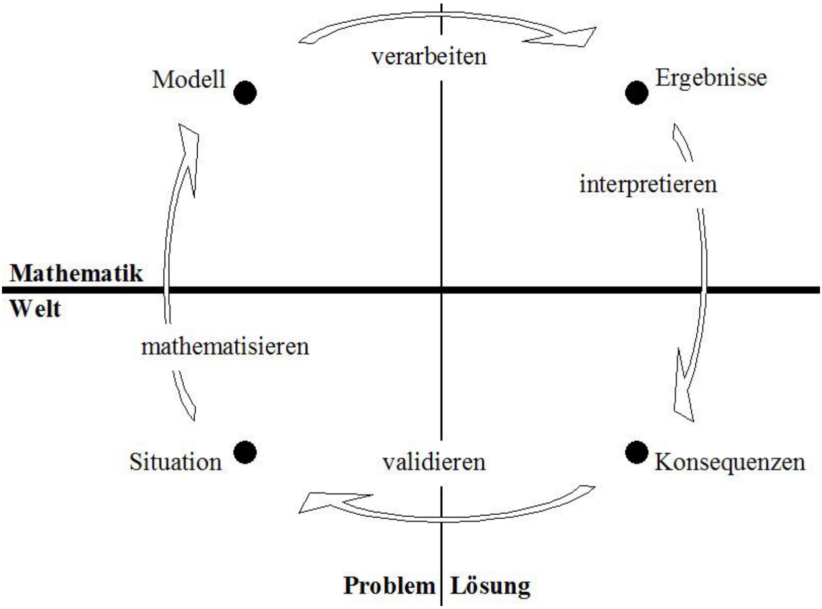


***Abb. 1:** Mathematische Modellbildung (vgl. SCHUPP 1988)*

Zentrale mentale Tätigkeiten sind hierbei das *Übersetzten zwischen Realität und Mathematik*, wenn etwa zu einer Sachsituation eine angemessene Mathematisierung gefunden werden oder wenn ein mathematisches Ergebnis wieder im Hinblick auf die Sachsituation interpretiert werden soll.

Hierfür braucht man *Vorstellungen* davon, welche mathematischen Inhalte oder Verfahren zu einer bestimmten Sachsituation passen könnten bzw. umgekehrt, welche Situationen sich mit bestimmten mathematischen Inhalten modellieren lassen.

Dies fängt bereits bei sehr einfachen Kontexten an: Wer z. B. mit dem Verfahren der *Subtraktion* nicht die Vorstellung des *Abtrennens*