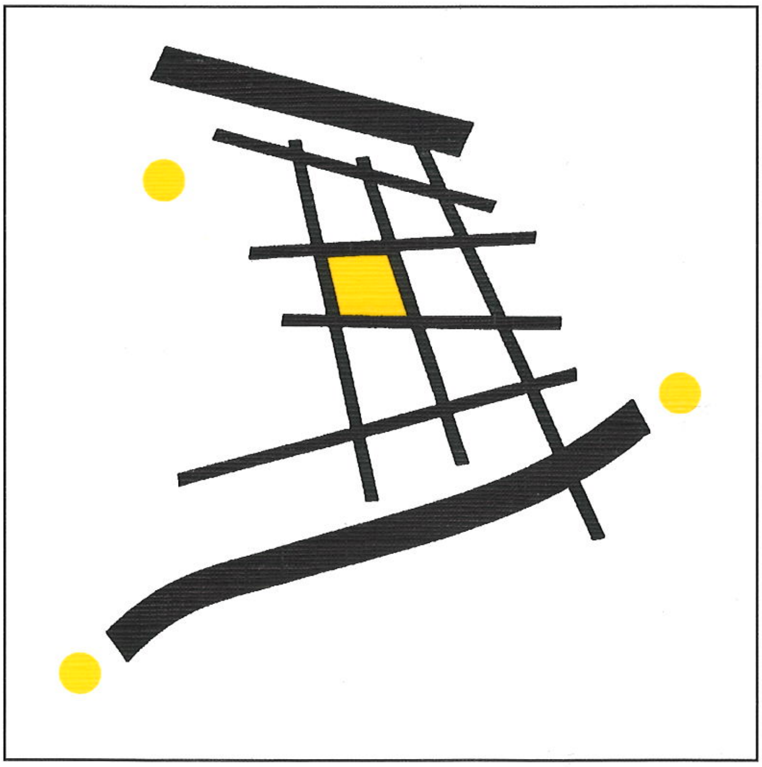
Beiträge aus dem ISTRON-Wettbewerb

Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht



Herausgeber:
Werner Blum

div verlag franzbecker

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie;
detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Information bibliographique de la Deutsche Nationalbibliothek
La Deutsche Nationalbibliothek a répertorié cette publication dans la Deutsche Nationalbibliografie;
les données bibliographiques détaillées peuvent être consultées sur Internet
à l'adresse http://dnb.d-nb.de.

ISTRON Band 0:
Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht
Beiträge aus dem ISTRON-Wettbewerb

Herausgeber Werner Blum

ISBN 978-3-88120-229-9

Inhalt

Vorwort

Der Mathematikunterricht besinnt sich seit Ende der 70er Jahre wieder mehr und mehr auf Realitätsbezüge, auf Anwendungen. Das gängige Wort "Anwendungen" ist teilweise mißverständlich: Mathematik wird nicht nur auf irgendetwas außerhalb von ihr angewandt, vielmehr geht es um das komplexe Beziehungsgeflecht zwischen Mathematik und dem "Rest der Welt", kurz: zwischen Mathematik und Realität. Idealtypisch vergröbert läßt sich das Verhältnis zwischen Mathematik und Realität beim angewandten Problemlösen wie folgt beschreiben. Der Prozeß beginnt bei einer problemhaften Situation in der Realität, führt - sofern überhaupt möglich - über ein zweckgerichtet vereinfachtes Realmodell in die Mathematik, zieht Schlußfolgerungen aus dem so entstandenen mathematischen Modell und führt durch Interpretation und Validierung der erhaltenen mathematischen Ergebnisse wieder zur Ausgangssituation zurück. Zentral sind hierbei die Übersetzungsphasen, d.h. die Schritte von der Realität zum mathematischen Modell und von der Mathematik zum realen Problem. Der erstgenannte Schritt ist die mathematische Modellbildung. Heute wird oft auch der gesamte Prozeß wie eben skizziert als "Modellbildungsprozeß" bezeichnet. Ich spreche hier von "Anwendungen und Modellbildung", um sämtliche Verbindungen zwischen Realität und Mathematik zu erfassen, von eingekleideten Aufgaben bis hin zu komplexen Realproblemen.

Weshalb besinnt sich der Mathematikunterricht stärker auf Anwendungen und Modellbildung? Dies ist nicht bloß eine Reaktion auf verfehlte Strengekonzepte im Mathematikunterricht der 60er und 70er Jahre, auch nicht ausschließlich eine Antwort auf brennende gesellschaftliche oder ökologische Fragen in unserer Lebenswelt. Vielmehr soll der Mathematikunterricht aus vielerlei Gründen anwendungsorientiert sein: Um Lernenden Hilfen zu geben beim Verstehen und Bewältigen von Situationen aus Alltag und Umwelt; um mit dazu beizutragen, bei Lernenden wünschbare "allgemeine" Qualifikationen (wie Übersetzen zwischen Realität und Mathematik) und Haltungen (wie Offenheit gegenüber neuen Situationen) zu fördern; um bei Lernenden ein nicht-verfälschtes Bild von Mathematik in Geschichte und Gegenwart aufzubauen, das auch den tatsächlichen Gebrauch (bzw. Mißbrauch) von Mathematik miteinschließt; um Lernende zu Reflexionen anzuregen, auch über sich selbst; um das Lernen von Mathematik zu unterstützen (Hinführungen, umfassende Begriffsbildungen, Behalten von Inhalten oder Strukturieren von Stoffgebieten).

Immer mehr Lehrende beziehen Anwendungen und Modellbildung in ihren Mathematikunterricht ein. Sie tun dies, obwohl der Unterricht hierdurch nicht vordergründig "leichter" wird - im Gegenteil: Sowohl für Lehrende als auch für Lernende wird der Unterricht anspruchsvoller, komplexer, anstrengender, weniger kalkulierbar. Sie tun dies, obwohl sie laut Lehrplan in jedem Schuljahr eine solche Fülle mathematischer Stoffinhalte behandeln sollen, daß die Versuchung groß ist, den für alle Beteiligten vordergründig weit bequemeren Weg zu wählen: Sich zu konzentrieren auf die Einübung von Routine-Kalkülen, die in der jeweils nächsten Klassenarbeit oder bei der Abschlußprüfung abgefragt werden.

Glücklicherweise enthalten neuere Lehrpläne und neuere Schulbücher mehr und mehr Ermutigungen und Anregungen für realitätsbezogenes Lehren und Lernen von Mathematik und unterstützen damit Lehrende in ihrer so wichtigen, aber wahrlich nicht einfachen Aufgabe. Auch gibt es in der Literatur sehr viele anwendungsbezogene Unterrichtsvorschläge, z.T. bis ins methodische Detail ausgearbeitet[1]. Hierzu paßt auch eine neue Schriftenreihe beim Franzbecker-Verlag, die 1993 startet: Die Reihe "Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht", die sowohl Originalbeiträge als auch Nachdrucke von Arbeiten mit konkreten Unterrichtsvorschlägen enthält[2]. Herausgeber dieser Reihe ist die Gruppe ISTRON, der etwa 30 Personen aus Deutschland und Österreich angehören, die sich - in Schule oder Hochschule - für einen realitätsorientierten Mathematikunterricht engagieren.

Die eben genannte Gruppe ist Teil eines globalen Netzwerkes, welches die internationale Gruppe gleichen Namens ISTRON etabliert hat; diese Gruppe besteht aus acht Personen aus verschiedenen Ländern Europas und den USA, darunter der Herausgeber des vorliegenden Bandes. Dieser Band ist hervorgegangen aus einem Wettbewerb, zu dem die internationale ISTRON-Gruppe aufgerufen hatte. Der Aufruf war Ende 1991/ Anfang 1992 in verschiedenen Zeitschriften in Europa und Amerika abgedruckt. Er lautete in deutscher Sprache:

> ISTRON, eine neue internationale Initiative zur Verbesserung des Mathematikunterrichts, wird als eine ihrer ersten Aktivitäten einen Band mit anwendungsbezogenen Materialien für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe zusammenstellen. Die Materialien können konkrete Unterrichtseinheiten, Berichte über Unterrichtserfahrungen, Vorstellung neuer Beispiele oder anderes sein. Sie sollen nur das Lehren und Lernen von Mathematik in Verbindung mit realen "Anwendungen" betreffen.
> Wir erbitten herzlich Ihren Beitrag für diesen Band. Bitte reichen Sie zwei Exemplare Ihres Beitrags (maximal 20 Seiten, zweizeilig getippt) bis 15. März 1992 ein. Ihr Beitrag kann in deutsch, englisch, französisch oder spanisch geschrieben sein.
> Die besten Beiträge werden für den Band ausgewählt. (Bei genügender Anzahl guter Beiträge können mehrere Bände entstehen.) Ein Autor wird als Preis eine kostenlose Reise zum Kongreß ICME-7 im Juli 92 in Québec erhalten.
> Machen Sie mit! Wir freuen uns auf Ihren Beitrag.

Der vorliegende Band enthält zwölf ausgewählte Beiträge deutscher und österreichischer Autoren zu diesem Wettbewerb. Die Beiträge sind daher - bis auf kleinere nachträgliche Änderungen - bereits im Frühjahr 1992 fertiggestellt worden. Die Autoren sind vorwiegend Lehrende an Schulen, z.T. auch Lehrende an Universitäten (siehe die Übersicht auf S.147). Sämtliche Beiträge enthalten konkrete und z.T. vielfach erprobte Vorschläge zur Einbeziehung von Anwendungen in den Mathematikunterricht. Sie sind teils auf die Sek. I , teils auf die Sek. II bezogen. Die angesprochenen mathematischen Gebiete umfassen Arithmetik/Sachrechnen (Nr. 4, 9), Gleichungen/Funktionen (Nr. 2, 6, 12), Geometrie (Nr. 11), Stochastik (Nr. 3, 8), Analysis (Nr. 7, 10) und Lineare Algebra/ Analytische Geometrie (Nr. 3, 5). Außermathematisch geht es um Probleme aus Alltag und Umwelt (Nr. 1, 2, 4, 6, 8, 9, 12), Biologie (Nr. 3, 6), Physik (Nr. 5, 10), Technik (Nr.7), Wirtschaft (Nr. 6) und Sport (Nr.11). Die Reihenfolge der Beiträge ist alphabetisch nach den Autoren vorgenommen worden. Übrigens ist auch der siegreiche Beitrag des internationalen Gesamt-Wettbewerbs hier vertreten: Heinz Böers Milchtüte; insofern gibt es also einen weiteren Grund, weshalb dieser Beitrag am Anfang steht.

---

[1] Vgl. die in der Bibliographie "Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht" (Teil 1: 1982; Teil 2: [2]1992) von G. Kaiser-Meßmer/ W. Blum/ M. Schober aufgeführte Literatur.

[2] Band 1 (herausgegeben von W. Blum/ W. Henn/ M. Klika/ J. Maaß) mit Beiträgen zur Sek. I und Band 2 (herausgegeben von G. Graumann/ T. Jahnke/ G. Kaiser-Meßmer/ J. Meyer) mit Beiträgen zur Sek. I und Sek. II erscheinen in 1993/94.

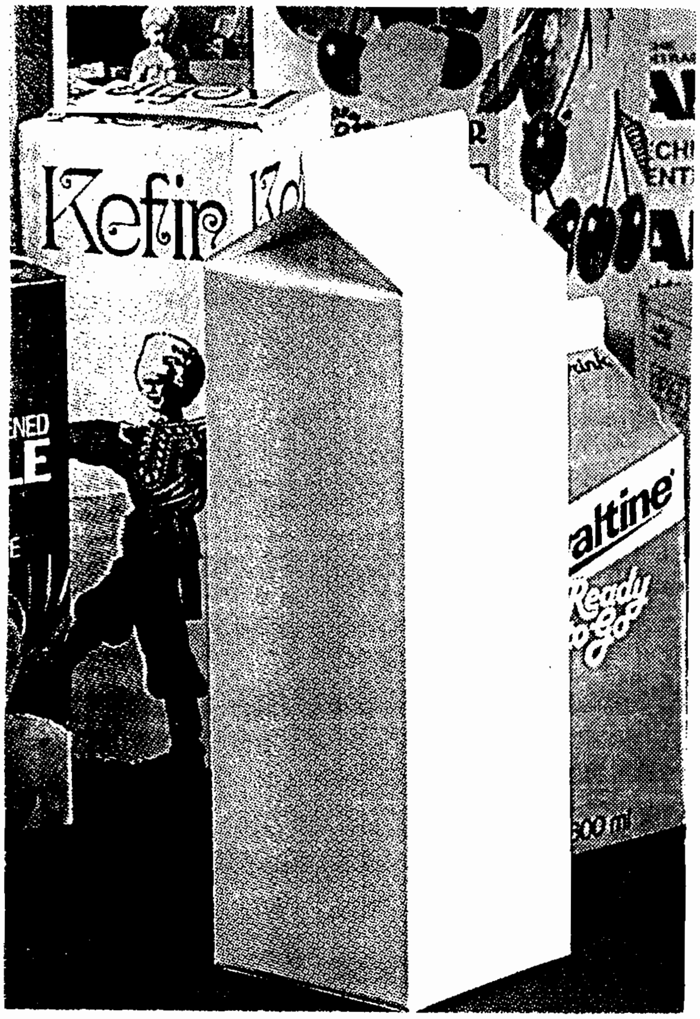
Für seine kompetente, engagierte, zeitintensive und in jeder Hinsicht unentbehrliche Unterstützung bei der Herstellung der Druckfassung dieses Bandes danke ich meinem Mitarbeiter Torsten Warmuth. Herrn Dr. Walter Franzbecker gilt mein Dank für seine freundliche Bereitschaft zur Publikation des Bandes. Ganz besonders danke ich allen Autoren für ihre Mitarbeit beim gemeinsamen Bemühen um eine Verbesserung des Mathematikunterrichts durch den Einbezug von Anwendungen und Modellbildung.

Ich hoffe auf eine weite Verbreitung der hier präsentierten Vorschläge.

Kassel, im Juni 1993 Werner Blum

Extremwertproblem Milchtüte
Eine tatsächliche Problemstellung aktueller industrieller Massenproduktion

Heinz Böer, MUED Appelhülsen, Ricarda-Huch-Gymnasium Gelsenkirchen



Die marktübliche 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche wird auf optimalen, hier: minimalen, Materialverbrauch hin untersucht. Dabei werden alle Herstellungsbedingungen der realen Milchtüte - wie Klebekanten u.ä. - berücksichtigt. Die 1-Liter-Milchtüte und die 0,5-Liter-Milchtüte liegen in ihren Abmessungen sehr nahe beim optimalen Wert. Die gemeinsame Optimierung der beiden Verpackungen liefert Überraschendes. Als typisches Extremwertproblem (mit numerischer Nullpunktbestimmung) paßt die Reihe in den Analysisunterricht.

0. Vorbemerkungen

0.1. Die Aufgabe

Eine "anwendungsorientierte" Standardaufgabe in Schulbüchern lautet: "Bestimme die Abmessungen der oberflächenminimalen senkrechten Säule mit quadratischer Grundfläche, die einen Liter faßt."
Herauskommt mit dem üblichen Extremwertproblem-Kalkül ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm.
Diese Aufgabenstellung kann man zum Anlaß nehmen, ein ernsthaftes Optimierungsproblem zu behandeln:

Ist die marktübliche 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche verpackungsminimal hergestellt?

0.2. Relevanz der Aufgabe

Die "materialminimale Milchtüte" ist ein *relevantes Extremwertproblem*

I. Sie ist Gegenstand alltäglichen Gebrauchs.

II. Sie trifft den ökonomischen und ökologischen Bereich:

- Die Milchtüte ist industrielles Massenprodukt. Für solche lohnt es - schon aus ökonomischen Gründen - den Materialaufwand zu minimieren. Und es lohnt, theoretisches Wissen (hier: den Extremwertproblem-Kalkül) zu investieren.

- Als Massenprodukt stellt die Milchtüte auch ein ökologisches Problem dar - zugespitzt in der Alternative: wiederverwendbare Mehrwegflasche oder Wegwerf-Milchtüte. Wenn schon die (faktisch eindeutige) Entscheidung zugunsten der Wegwerfpackung gefällt ist, dann sollte die zumindest in ihrem dann nötigen Verpackungsaufwand minimal sein (s.u. Punkt 15).

III. Sie ist ein typisches Beispiel für die Anwendung mathematischen Wissens:

- Die Problemstellung zeigt exemplarisch einen Fall technischer Optimierung.
- Das Ergebnis weist die Optimierungsrechnung als realistisch aus.

0.3. Kenntnisse, die vorausgesetzt werden

- Der Extremwertproblem-Kalkül: notwendiges, hinreichendes Kriterium für relative Extrema, Randextremaprüfung.
- Ein numerisches Nullstellenbestimmungsverfahren: hier Intervallhalbierungsmethode, Ableitung von Potenzfunktionen mit ganzen Exponenten.

0.4. Was gelernt werden kann

- Mathematisierung eines technischen Problems
- Schrittweise Präzisierung der Fragestellung aus den Bedingungen der Produktion
- Schrittweise Präzisierung des Rechnungsansatzes aus den Bedingungen der Produktion
- Insgesamt: Das typische Vorgehen bei einer Modellbildung mit
  - dem 4er-Schritt: von der Realsituation über ein Realmodell, ein mathematisches Modell, die Lösung im mathematischen Modell und durch Re-Interpretation zurück zum Realproblem
  - mehrfachem Durchlaufen der 4 Schritte, um der Realsituation angepaßtere mathematische Modelle und treffendere Ergebnisse zu erhalten
  - nochmaliger Überprüfung der Realsituation nach einer Fragestellung, die sich im mathematischen Modell entwickelt (14.3).

1. Entwicklung der Extremwertproblem-Fragestellung

- Als Hausaufgabe zur Stunde kann man die Schulbuchaufgabe oben stellen und sie kurz besprechen, soweit es Schwierigkeiten mit ihrer Bearbeitung gab.
  Ergebnis: die materialminimale 1-Liter-Verpackung ist der Würfel mit 10 cm Kantenlänge (sofern ein Quader mit quadratischer Grundfläche gefordert ist).
- Zeigen einer vollen 1-Liter-Milchtüte (die marktübliche mit quadratischer Grundfläche).--
  Naheliegende Schüleräußerungen wie: "Materialverschwendung"...
  Das kann man zu einer Schülerbefragung nutzen: Wer meint, daß...
- Präzisierung der Problemstellung:

Ist die marktübliche 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche materialminimal gefertigt?

- Entwicklung der Extremwertproblemfragestellung: Bei einem großen Wert für die Breite erhält man eine "Platte" Milch - mit viel Verpackungsmaterial-Bedarf.
  Bei einem großen Wert für die Höhe erhält man eine "Stange" Milch - wieder mit viel Verpackungsmaterial-Bedarf.
  Dazwischen liegen niedrige Werte für den Materialbedarf, also auch ein Minimum.
- Nach Einführung mathematischer Symbole etwa folgende Reformulierung des Problems:

Bei welcher Höhe h und Breite b ist der Materialverbrauch M(b,h) der Standardmilchtüte (1000 cm^3) mit quadratischer Grundfläche minimal?

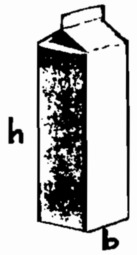


Fig.1

- Spätestens hier: Diskussion des offensichtlich materialverschwendenden "Dach"-Aufsatzes. - Er wird produziert, damit die Milchtüte leicht zu öffnen ist und damit eine bequeme Ausgießmöglichkeit entsteht.
- Diese Überlegung macht in der Problemformulierung oben folgende Ergänzung nötig:

Gesucht: der minimale Materialverbrauch M(b,h) der Standardmilchtüte unter Herstellungsbedingungen.

Wobei die Herstellungsbedingungen im Folgenden genauer zu fassen sind.

- Soweit es sich hier ergibt (oder früher oder später): Diskussion der Relevanz dieser Fragestellung: etwa in den Punkten, die oben unter Punkt 0.2 stehen, o.ä.

Bis hierher kann man im Unterrichtsgespräch arbeiten. Der Lehrer kann sich weitgehend zurückhalten. Alle Beiträge zur Fragestellung liegen auf der Hand und kommen spontan von Schülern. Besonderer Wert und auch Zeit sollte darauf verwandt werden, die Optimierungsfragestellung zu entwickeln und ihre Relevanz zu diskutieren. Die Fragestellung notiert man am besten an der Tafel.

2. Quantifizierung der Herstellungsbedingungen

2.1. Die Einzeltüte

- Dazu (vorher vorbereitete) aufgetrennte Milchtüten an Schülergruppen verteilen. Wenn man das Thema etwa eine Woche vorher - mit Erinnerung - anspricht, können die aufgetrennten Milchtüten auch von Schülern mitgebracht werden. Es kommen i.d.R. so viele zusammen, daß zumindest jede Gruppe eine Tüte zur Untersuchung hat.
- Gemeinsames Zusammentragen der Herstellungsbedingungen, begleitet z.B. durch eine vorbereitete und schrittweise zu ergänzende Folienserie (als Ergebnis auf dem OHP das Arbeitsblattbild, s. S.5):

  Klebefalz 'links': 1,5 cm

  Klebefalz oben: 1 cm

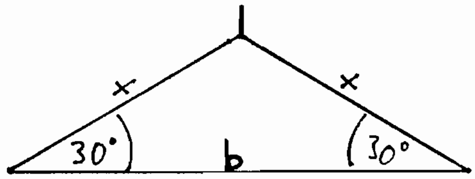
  Klebefalzaufsätze oben: 0,7 cm

  Klebefalzaufsätze unten: 0,7 cm

  Bodenstücke: Breite b, 'Höhe' b/2

  Deckelstücke: Breite b, 'Höhe' ??
- Ermittlung der 'Deckel' 'Höhe':

  Untersuchung der zusammengeklappten Milchtütennetze (die verteilt sind) bzw. der vollen Milchtüte: die 'Höhe' der Deckelstücke ist als Schenkellänge im gleichschenkligen Aufsatzdreieck zu bestimmen. Geschätzte Basiswinkelgröße 30° (s. S. 4).
- Diese 7 Daten sind aus produktionstechnischen Bedingungen gefordert:
  Die Tüte muß genügend gut geklebt sein; der Boden soll stabil sein; sie soll leicht aufzureißen sein und dann eine gute Gießmöglichkeit haben.
  Z.T. b- und h-abhängig, z.T. nicht, müssen diese Produktionsbedingungen jedenfalls erfüllt sein.



$$\cos 30° = \frac{b/2}{x}$$

$$x = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

Fig.2

2.2. Massenproduktion und Serienfertigung

Es wird nicht nur eine Milchtüte produziert, sondern Millionen pro Jahr. Für diese Serienfertigung werden die Milchtüten-Netzebenen fortlaufend ausgestanzt.

- Das als Information.
- Durch Nutzung mehrerer Milchtüten entwickeln des Stanzplanes (in den Gruppen): Die Klebefalzaufsätze sind jeweils so versetzt, daß 2 Milchtüten-Pappen direkt aneinander passen - bis auf Rundungen für's Zusammenstecken, kleine Eckenabfälle u.ä.

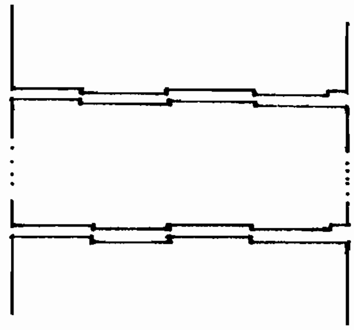


Fig.3

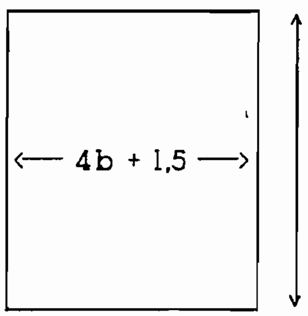
Damit sind die Herstellungsbedingungen präzisiert und die Ausgangsproblemstellung ist vollständig:

Bei welcher Höhe h und Breite b ist der Materialverbrauch M(b,h) der Standardmilchtüte (1000 cm^3) mit quadratischer Grundfläche minimal unter den 7 genannten Herstellungsbedingungen für die Einzeltüte und der Bedingung der Serienherstellung?

Die Arbeit in diesem Teil ist wesentlich getragen von Gruppenarbeit. Lediglich das Zusammentragen der Ergebnisse aus Teil I und die Bestimmung der 'Deckel' 'Höhe' im Unterrichtsgespräch machen. Aber auch hier: bis auf kurze Impulse und Hinweise die Schüler alles selber entwickeln lassen.

3. Aufstellen der Zielfunktion

- Dazu das Arbeitsblatt verteilen (s. S.5).
  Das Bild muß evtl. gemäß den ihnen vorliegenden Milchtüten-Typen geändert werden.
  Es gibt Unterschiede in der Anordnung der Klebefalz-Aufsätze.
- Ergebnis:



$$h + \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}} + 1{,}7$$

$$M(b;h) = (4b + 1{,}5)\left(h + \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}} + 1{,}7\right)$$

Fig.5

Mit Hilfe des Arbeitsblattes finden die Schüler, z.B. in Partnerarbeit, die Zielfunktion selber. Allenfalls herumgehen und einzelne Schüler unterstützen.

Modellbildung
Ein didaktischer Ansatz zur Herstellung von Praxisbezug

Godehard Franzen, Oberstufen-Kolleg des Landes Nordrhein-Westfalen an der Universität Bielefeld

Zu Beginn der Sekundarstufe II sieht sich der Mathematikunterricht an vielen Ausbildungseinrichtungen vor die schwierige Aufgabe gestellt, neue SchülerInnen, solche, die von anderen Schulen überwechseln, oder auch solche, die sich nach einer längeren Unterbrechung wieder neu auf weiterführendes schulisches Lernen einlassen, an die Thematik und das Anspruchsniveau von Mathematik-Kursen der Sekundarstufe II heranzuführen. Diese Aufgabe ist so schwierig, weil diese Gruppe von SchülerInnen hinsichtlich ihrer Vorkenntnisse und Motivation sehr heterogen ist und weil der Anteil derjenigen SchülerInnen, die ein von Versagensängsten geprägtes Verhältnis zur Mathematik haben, beträchtlich ist. Es müssen also nicht nur kognitive Defizite aufgearbeitet werden, es muß vor allem auch etwas zum Aufbau einer halbwegs tragfähigen Motivation getan werden. Wie oft dies mißlingt, davon kann jeder Kollege und jede Kollegin berichten, der bzw. die regelmäßig Mathematik-Grundkurse in der Sekundarstufe II durchführt.

An einem traditionellen Gymnasium mit wenig Quereinsteigern zu Beginn der Sekundarstufe II mag das Problem durch einen gezielten Förderkurs lösbar sein. An anderen Einrichtungen, z.B. den Fachoberschulen oder den Kollegs des 2. Bildungswegs, gibt es dagegen kein Entrinnen vor dieser didaktisch-pädagogischen Aufgabe. Das gilt auch für das Oberstufen-Kolleg des Landes Nordrhein-Westfalen an der Universität Bielefeld (dieses Wortungetüm wird im folgenden mit OS abgekürzt), von dessen Erfahrungen hier die Rede sein soll.

Das OS ist ein Bildungsreformprojekt des Landes Nordrhein-Westfalen, das 1974 als Versuchsschule und Zentrale Wissenschaftliche Einrichtung der Universität Bielefeld gegründet wurde. Es versucht, ein zentrales Dilemma des bundesrepublikanischen Bildungssystems zu beseitigen: Das Ausbildungssystem der BRD ist geprägt durch ein zeitliches Nacheinander von allgemeinbildender schulischer und spezialisierter universitärer Ausbildung; beides wird säuberlich getrennt durch das Abitur. Diese Grundstruktur bedingt, daß Allgemeinbildung und Spezialisierung, eben weil sie zeitlich voneinander getrennt sind, inhaltlich nicht oder wenig aufeinander bezogen werden. Weder erfährt die spätere hohe Spezialisierung durch allgemeine übergreifende Fragestellungen eine Relativierung noch umgekehrt. Vieles spricht dafür, das Verhältnis von Allgemeinbildung und Spezialisierung eher dialektisch aufzufassen und eine dementsprechende Organisationsstruktur für den Übergang von der Schule zur Hochschule zu suchen. An diesem Grundgedanken machte sich Ende der 60er Jahre die Gründungsidee von Prof. Hartmut von Hentig für das OS fest. Das OS faßt die letzten drei Jahre der gymnasialen Oberstufe und das Grundstudium der Universität zu einem einheitlichen Ausbildungsgang zusammen: Die KollegiatInnen (so werden die Lernenden des OS genannt) treten mit der 'mittleren Reife' (Fachoberschulreife) in das OS ein und verlassen es nach vier, teilweise erst nach fünf Jahren, mit der allgemeinen Hochschulreife und der Befähigung, ihre Wahlfächer in einem höheren Fachsemester der Universität, in der Regel dem 4. oder 5., weiterzustudieren. Aus dem zeitlichen Nacheinander von Allgemeinbildung und Spezialisierung wird ein Nebeneinander: Die KollegiatInnen wählen bereits am Anfang ihrer Ausbildung zwei Studienfächer und werden entsprechend an universitätsorientierten Themen und Fragestellungen ausgebildet; sie haben aber parallel dazu bis zum Ende des Grundstudiums allgemeinbildende Kurse und Projekte. Die besondere didaktische Aufgabe besteht nun darin, die Bezüge zwischen Allgemeinbildung und Spezialisierung für die Lernenden erfahrbar zu machen (bzgl. weiterer Informationen zum Konzept des OS siehe insbesondere HENTIG (1971 und 1980) sowie BÖHNING (1985)).

Zu diesem bildungstheoretischen Ansatz des OS tritt ein zweites zentrales Ziel hinzu: Das OS möchte einen institutionellen Beitrag dazu leisten, die durch das vertikal gegliederte Schulsystem der Bundesrepublik bedingten Bildungsgangfixierungen aufzubrechen, d.h. den Zugang zu universitären Bildungsgängen auch für junge Menschen ohne gymnasiale 'Herkunft' zu verbessern. Durch einen Aufnahmeschlüssel wird aus den BewerberInnen die künftige Kollegiatenschaft so ausgewählt, daß die folgenden Zielquoten möglichst gut erreicht werden:

- ein Drittel der KollegiatInnen soll das OS als Einrichtung des 2. Bildungsweges nutzen,
- ein Drittel soll direkt aus den verschiedenen Schulformen der Sekundarstufe I an das OS überwechseln,
- eine Hälfte der Kollegiatenschaft soll über einen Qualifikationsvermerk (zum Besuch der gymnasialen Sekundarstufe II) verfügen, die andere Hälfte nicht.

Daß in dieser heterogen zusammengesetzten Kollegiatenschaft die Voraussetzungen - in kognitiver wie in affektiver Hinsicht - für eine Auseinandersetzung mit Mathematik sehr breit gestreut sind, ist offensichtlich.

In Bezug auf die Mathematik-Ausbildung unterscheidet das OS zwei Adressatengruppen, nämlich:

- KollegiatInnen mit Wahlfächern, die i.d.R. keinen Gebrauch von der Mathematik machen, und
- KollegiatInnen mit Wahlfächern, die - mehr oder weniger intensiv - auf die Mathematik als Hilfswissenschaft zugreifen.

Für die erste Adressatengruppe hat die Beschäftigung mit der Mathematik 'nur' allgemeinbildende Funktionen. Ein kanonisches Pensum müssen diese KollegiatInnen nicht bewältigen. Vielmehr kann das OS mit diesen KollegiatInnen unter weitestgehender Freistellung von schulischen Richtlinien Neues ausprobieren. Die verschiedenen Ansätze und Modelle sind in zahlreichen Publikationen beschrieben (siehe z.B. FRANZEN (1983), HOFFMANN (1986) und die Beiträge von EFFE/KEMPER, GERULL und SCHÜLERT/VOHMANN in BLUM (1989)).

Von einem curricularen Ansatz für die 2. Adressatengruppe soll im folgenden die Rede sein. Typisch für diese Gruppe ist z.B. ein Kollegiat, der nach einem Sekundarabschluß an einer Hauptschule eine Lehre in einem Metallbearbeitungsberuf abgeschlossen hat und nun mit dem Wunsch ans OS kommt, Geologie zu studieren. Für ihn ist der Einstieg in eine höhere Mathematik-Ausbildung, die er möglicherweise bei der Entscheidung für sein Fach nicht im Blick hatte, eine harte Nuß.

Das OS hat jahrelang versucht, das Problem mit Hilfe eines Kurses "Basiswissen Mathematik" zu lösen, der der naturwissenschaftlichen Fachausbildung vorgeschaltet wurde.
Der Kurs bestand aus Moduln (von "Bruchrechnung" bis "Trigonometrie") mit Basistexten, die wichtige Grundinformationen zum behandelten Stoff zusammenstellten, und zahlreichen Übungsaufgaben. Das Abarbeiten dieser Moduln war also im wesentlichen "wiederholendes Training". Für KollegiatInnen mit einem eher ungestörten Verhältnis zur Mathematik und verschütteten Vorkenntnissen war das eine gute Sache. Für KollegiatInnen mit einem gestörten Verhältnis zur Mathematik - aus welchen Gründen auch immer - reaktivierte dieser konzeptionelle Ansatz dagegen allzu häufig alte Versagensängste und führte so zu Lernblockaden, die die ganze weitere Ausbildung belasteten.

Das OS sucht einen Ausweg aus diesem Dilemma, indem es den (Wieder-)Einstieg in die Mathematik-Ausbildung unter eine für alle KollegiatInnen i.d.R. neue Zielkategorie stellt. Im Vordergrund des einführenden Kurses steht der Begriff der Modellbildung. Die KollegiatInnen sollen etwas darüber erfahren, wie man reale Systeme (natürlich einfache bzw. vereinfachte) auf mathematische Strukturen abbilden kann. Sie sollen dabei mit dem Strukturelement 'Funktion' vertraut gemacht werden und möglichst praxisnahe Verwendungen einfacher Funktionen kennenlernen. Fachliche Systematik wird zugunsten von Anschaulichkeit,

Plausibilität und heuristischer Argumentation zurückgestellt. Die KollegiatInnen sollen in dem Kurs eine vorläufige Perspektive gewinnen, womit sie sich in den folgenden Kursen beschäftigen sollen. Es werden daher viele Dinge angetippt, die der späteren Vertiefung bedürfen. Es wird aber bewußt auf das explizite Aufspüren und "Therapieren" von Defiziten im Bereich des Sekundarstufe-I-Stoffs verzichtet. Stattdessen wird darauf vertraut, daß die KollegiatInnen aus der Anwendungssituation heraus unmittelbar erfahren, wie nützlich die in der Sekundarstufe I gelernten (oder eben nicht gelernten) Kalküle sind, und daß möglichst viele KollegiatInnen daraus die Motivation gewinnen, das Aufarbeiten von Lücken zu ihrer eigenen Sache zu machen.
Bei der Gestaltung entsprechender Kurse müssen eine methodische und eine inhaltliche Ebene unterschieden werden. Der Prozeß der Modellbildung wird in methodische Elemente zergliedert:

- Quantifizierung von Eigenschaften: Variable
- Abbildung einer komplexen Struktur auf wenige Variable: Reduktion von Komplexität (Reduktionismus) durch quantifizierende Methoden
- statistische und kausale Abhängigkeiten
- Einschränkung auf einfache Abhängigkeiten: (mono-)kausale Modelle
- Formalisierung und Visualisierung von (mono-)kausalen Abhängigkeiten: Funktionen und Graphen
- Klassifikation von Modellen durch Modellannahmen: lineares und exponentielles Wachstum
- nichtlineare Modelle.

Die einzelnen Elemente müssen jeweils auf die Frage hin diskutiert werden, welcher (mitunter begrenzte) Erkenntnisgewinn den am Ende benutzten Modellen zukommt.

Quer zu der methodologischen Ebene liegen die inhaltlichen Themen, an denen das Konzept der Modellbildung entwickelt werden soll. In einem Kurs, der sich vorwiegend an KollegiatInnen mit den Fächern Biologie und Ökowissenschaften wandte, wurden u.a. folgende Probleme behandelt: Bevölkerungsentwicklung, Stromtarife und Energieverschwendung, "Halbpreispaß" (inzwischen heißt das bei den Deutschen Bahnen "Bahn-Card") für den Schienenverkehr, einfache Bewegungsabläufe, Kraftstoffverbrauch von Autos, Verkehrssicherheit und Geschwindigkeit, Auslastung von Straßen, "natürliche" Wachstumsvorgänge, Radioaktivität. Bei der Behandlung dieser Themen wird z.T. auf frühere eigene Vorschläge (FRANZEN (1975 und 1983)) und auf die zahlreichen Materialien zurückgegriffen, die von der Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Datei e.V., MUED, gesammelt wurden (insbesondere MUED (1985)). Die Themen lassen vielfältige Differenzierungen zu, jeweils bezogen auf die Vorkenntnisse und Interessen der KursteilnehmerInnen. Ohne dem Kursablauf Gewalt antun zu müssen, läßt sich durchaus ein systematisches Fortschreiten von einfachen zu komplexeren Modellen sicherstellen. Ein detailliertes Ablaufschema des genannten Kurses möchte ich hier nicht aufschreiben, weil es einen Grad von Erprobung vortäuschen würde, der am OS noch nicht erreicht ist, und weil es der Offenheit des Konzepts widersprechen würde.

In dem Kurs wurden vor allem Arbeitsblätter eingesetzt, die von den KollegiatInnen - im Anschluß an eine offene Problemdiskussion im Kursplenum bis zu einer vorläufigen Modellbeschreibung - in Kleingruppen bearbeitet wurden. Die Lösungen und ihre kritische Bewertung wurden dann von den KollegiatInnen in Einzelarbeit aufgeschrieben und - nach der Korrektur - im Kursplenum wieder diskutiert. Zur Verdeutlichung werden drei Arbeitsblätter in diesem Aufsatz abgedruckt.

Am Beispiel des Arbeitsblatts "Geschwindigkeit und Benzinverbrauch" sei das Vorgehen im Unterricht näher erläutert. Ausgangspunkt war die aktuelle Diskussion über die Nützlichkeit eines Tempolimits im Hinblick auf den Benzinverbrauch in der BRD. Daß der Benzinverbrauch "irgendwie" mit der Geschwindigkeit zusammenhänge, war den KursteilnehmerInnen durchweg klar. Ob es sich dabei um einen - oder gar den - entscheidenden Einflußfaktor handele, war schon ziemlich umstritten. In freiem "brain stroming" wurden so ziemlich alle wesentlichen Einflußfaktoren von der Fahrzeugwahl über das individuelle Fahrverhalten bis hin zu dem Tatbestand, daß, wer nicht fährt, auch kein Benzin verbraucht, zusammengetragen, ein eindrucksvoll komplexes System. Die KollegiatInnen wurden unmittelbar damit konfrontiert, was für ein radikaler methodischer Schritt es ist, wenn man diese Komplexität auf einen Einflußfaktor, eben die Geschwindigkeit, reduziert. Sie hatten z.T. sogar - berechtigte - Zweifel, ob es sich da auch wirklich nur um einen Einflußfaktor handelt. Ihr Einwand: der individuelle Fahrstil hänge mit der zulässigen Höchstgeschwindigkeit zusammen. Hat man den methodischen Schritt der Eingrenzung auf den Einflußfaktor 'Geschwindigkeit' vollzogen und macht sich daran, den Zusammenhang von Benzinverbrauch und Geschwindigkeit näher zu analysieren bzw. zu beschreiben, so eröffnet sich schnell eine neue Ebene hoher Komplexität: die Vielfalt der Fahrzeugtypen, die Abhängigkeit von der Zuladung, "wann fährt man schon mit konstanter Geschwindigkeit?",.... Es wird schnell klar, daß diese Komplexität durch eine funktionale Abhängigkeit zwischen den Variablen 'Benzinverbrauch' und 'Geschwindigkeit' nicht beschrieben werden kann. Man muß eine weitere Reduktion der Komplexität vornehmen. Im Unterrichtsgespräch wird herausgearbeitet, daß es hilfreich ist, zwischen der individuellen Nutzung eines Fahrzeugs und seinen physikalisch-technischen Verbrauchseigenschaften zu unterscheiden. Letzteres wird beschreibbar, wenn man das Modell von jeweils mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Fahrzeugen eines festen Typs zugrunde legt. Erst dann kann man sinnvoll von einem funktionalen Zusammenhang zwischen Benzinverbrauch und Geschwindigkeit reden. Der Weg bis zu diesem eingegrenzten Modell war den KollegiatInnen eindrucksvoll, am Ende fast ermüdend lang.

Nach diesen Vorbereitungen wurde das Arbeitsblatt bearbeitet. Die Teile a) bis c) bieten Gelegenheit, Mathematisch-Handwerkliches zu üben. Bei d) holt die KollegiatInnen das methodische Problem wieder ein, jetzt gewissermaßen in umgekehrter Reihenfolge: wie kommt man von einem Modell für die physikalisch-technischen Verbrauchswerte für die Einzelfahrzeuge zu einem globalen Modell für das gesamte Verkehrssystem? Die meisten KollegiatInnen merken schnell - freilich ohne dies auf der Metaebene zu benennen -, daß man das Gesamtverkehrssystem und seine Fahrleistung nur mit Hilfe von globalen Kennziffern und Durchschnittswerten sinnvoll beschreiben kann, sie benennen u.a. Dinge wie: Anzahl der KFZ; durchschnittliche Jahresfahrleistung; Anteil der Fahrleistung auf Autobahnen; Verteilung der gefahrenen Autobahn-Kilometer auf die verschiedenen Geschwindigkeiten. Sie trauen sich aber eine grobe Abschätzung nicht zu. In der Nachbereitung wird in Anknüpfung an die Frage "Liegt der Einspareffekt bei der Festsetzung der Höchstgeschwindigkeit auf 100 km/h eher bei 1% oder eher bei 10%?" herausgearbeitet, daß die Differenzierung/Verfeinerung des Modells mit der Genauigkeit/Zuverlässigkeit der erwarteten Aussagen zusammenhängt. Grobe Modelle lassen i.d.R. nur qualitative oder Größenordnungsaussagen zu, die gleichwohl von Erkenntniswert sein können.

Erste Rückmeldungen von KollegiatInnen zu diesem Konzept betonen, daß für sie diese Art des Zugangs zur Mathematik sehr ungewohnt gewesen sei, sehr anregend, aber auch anspruchsvoll. In der Tat stellt das Konzept ungewohnte Anforderungen an die Abstraktionsfähigkeit. Die KollegiatInnen müssen bei häufigem Themenwechsel immer wieder ähnliche strukturelle Elemente wiedererkennen. Sie müssen sich eben mit Mathematisierung bzw. Modellbildung beschäftigen. Wer sich daran bewährt, wird nach meiner Überzeugung am Ende auch die Aneignung der Kalküle bewältigen. Dies muß allerdings erst noch genauer untersucht werden.

Literaturverzeichnis

BLUM, Werner et al. (Hrsg.): Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics, Chichester 1989

BÖHNING, Peter / FRANZEN, Godehard / GLÄSSING, Gabriele / HENTIG, Hartmut von: Studierfähigkeit und Lernumwelt, Bielefeld 1985