

Anna-Lena Barkley

**Lehr- und Lernprozesse  
zum Verständnis der  
theoretischen Wahrscheinlichkeit  
im Mathematikunterricht  
der Grundschule**

Theoretische Grundlagen und Fallstudien



Von der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg zur Erlangung des Grades und Titels eines Doktors der Philosophie (Dr. phil.) angenommene Dissertation von Frau Anna-Lena Barkley, geboren am 28.05.1989 in Lüdenscheid.

Erstgutachter: Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf

Zweitgutachterin: Prof. Dr. Astrid Fischer

Tag der Disputation: 30. August 2019

---

1. Auflage Oktober 2019  
Veröffentlicht im Verlag Franzbecker  
Hildesheim

© 2019 Verlag Franzbecker, Hildesheim

ISBN 978-3-88120-540-5

Anna-Lena Barkley  
Lehr- und Lernprozesse zum Verständnis der theoretischen  
Wahrscheinlichkeit im Mathematikunterricht der Grundschule  
Theoretische Grundlagen und Fallstudien  
tmfl Band 89

[www.franzbecker.de](http://www.franzbecker.de)

## **Vorwort**

Die Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeiten führt (vermutlich nicht nur) im Mathematikunterricht der Grundschule trotz der curricularen Verankerung eher ein Schattendasein. Ein wichtiger Grund liegt darin, dass die hintergründigen Konzepte zur mathematischen Modellierung des Zufalls offenbar auch vielen Erwachsenen rätselhaft bleiben, so dass selbst fachlich ausgebildete Lehrerinnen und Lehrer in der Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffe unsicher sind. Ein weiterer Grund kann aber auch darin gesehen werden, dass Wahrscheinlichkeiten als Modellierungsgrundlage für Zufallsprozesse eng mit dem Bruchzahlbegriff einhergehen, der seine Grundlegung in der Regel erst in der Sekundarstufe erfährt.

Hieraus ergibt sich ein didaktisches Dilemma: Zwar stehen einer adäquaten Behandlung von Zufallsprozessen im Anfangsunterricht die begrenzten arithmetischen Werkzeuge der Grundschule im Wege, die zur Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten notwendig erscheinen. Gleichwohl müssen die Zufallsprozesse – gerade weil ihre Modellierung offenbar schwierig ist – nach dem Spiralprinzip möglichst früh Einzug in den Unterricht finden.

Die vorliegende Arbeit widmet sich diesem Dilemma aus zwei verschiedenen Perspektiven: Zum einen wird untersucht, welche mathematischen Grundlagen Grundschul Kinder zur Modellierung des Zufalls mitbringen können. Auf der anderen Seite wird erprobt, inwiefern sich die Zugänge der Kinder durch geeignete didaktische Maßnahmen weiterentwickeln lassen können.

Frau Barkley liefert dabei ein differenziertes begriffliches Netz zur Charakterisierung von konzeptuellen Verständnissen, die von der Beobachtung einzelner empirischer Merkmale von Zufallsgeneratoren hin zur Konstruktion von Merkmalsbeziehungen im Sinne des Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriffs reichen und mit denen die Lernwege der Kinder von einem individuellen zu einem tragfähigen theoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriff detailliert gefasst werden können. Zur Initiierung entsprechender Lernprozesse ist es wesentlich, das Vorwissen der Kinder durch produktive Irritationen zu erschüttern, damit sie ihre Erwartungen an die Ergebnisse von Zufallsexperimenten reflektiert hinterfragen und zu neuen, stärker strukturellen Erkenntnissen über Wahrscheinlichkeiten gelangen können.

Damit reiht sich die vorliegende Arbeit in die fachdidaktische Tradition der Entwicklungsforschung ein und bereichert gleichermaßen die konstruktive wie die rekonstruktive Perspektive in der Mathematikdidaktik auf hohem Niveau.

Ralph Schwarzkopf

## **Danksagung**

Die Entstehung dieser Arbeit ist von vielen verschiedenen Personen begleitet und unterstützt worden. Dafür möchte ich mich herzlich bedanken.

Herr Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf hat durch die kontinuierliche Betreuung einen maßgeblichen Beitrag zum Entstehen dieser Arbeit geleistet. Er hat mich in unzähligen Besprechungen durch konstruktive Kritik, viel Geduld, wertvolle Hinweise und nicht zuletzt durch seine optimistische und gelassene Art immer wieder ermutigt und vorangebracht. Dabei hat er mir stets den Rücken frei gehalten, sodass ich genügend Zeit und Ruhe für meine Dissertation hatte. Vielen Dank für alles!

Ebenso danke ich Frau Prof. Dr. Astrid Fischer dafür, dass sie durch intensive Gespräche und neue Anregungen zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen hat.

Der AG Mathematikdidaktik der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg danke ich ganz herzlich für die gemeinsamen AG-Treffen, den inhaltlichen Austausch und die Denkanstöße. Viele konstruktive Hinweise und Ideen gingen insbesondere aus produktiven Diskussionen mit Paul Gudladt und Marieke Roskam hervor, durch die meine Arbeit nachdrücklich beeinflusst wurde.

Für die Mitwirkung und das Interesse an meiner empirischen Untersuchung danke ich allen Beteiligten: Den Lehrkräften für die zur Verfügung gestellte Unterrichtszeit und die Organisation, den Eltern für das Einverständnis und das mir entgegengebrachte Vertrauen und insbesondere den interviewten Schülerinnen und Schülern für ihre Mitarbeit. Ohne ihre Unterstützung hätte diese Arbeit nicht entstehen können.

André Köhler sowie meiner Schwiegermutter Monika Barkley möchte ich für das sorgfältige Korrekturlesen meiner Arbeit danken. Durch sie konnten zum Schluss noch einige Fehler und missverständliche Formulierungen berichtigt werden.

Meinen Eltern und Großeltern danke ich für die vielfältige Unterstützung während meiner gesamten Studienzeit.

Ein besonderer Dank gilt meinem Mann Felix. Er hat mich durch viele wertvolle Hinweise, durch kritische Nachfragen sowie durch viel Geduld und Hilfe in allen Hoch- und Tiefphasen unterstützt.

Anna-Lena Barkley

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>EINLEITUNG .....</b>	<b>1</b>
<b>1 AUSGANGSPUNKTE FÜR DIE BESCHÄFTIGUNG MIT WAHRSCHEINLICHKEITEN .....</b>	<b>5</b>
1.1 ASPEKTE DES WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFFS.....	5
1.2 GRÜNDE FÜR EINEN STOCHASTIKUNTERRICHT IN DER GRUNDSCHULE.....	9
1.3 GEGENWÄRTIGE UNTERRICHTLICHE PRAXIS IN DER GRUNDSCHULE .....	11
<b>2 ÜBERBLICK ÜBER BEREITS VORHANDENE EMPIRISCHE STUDIEN .....</b>	<b>17</b>
2.1 AUSGEWÄHLTE STUDIEN ZUR ENTWICKLUNG DES STOCHASTISCHEN DENKENS .....	17
2.2 AUSGEWÄHLTE STUDIEN ZU VERSCHIEDENEN ASPEKTEN DES WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFFS .....	18
2.2.1 Studien zu subjektiv geprägten Einschätzungen.....	19
2.2.2 Studien zu frequentistisch geprägten Einschätzungen.....	25
2.2.3 Studien zu theoretisch geprägten Einschätzungen .....	31
2.3 ENTWICKLUNG DES FORSCHUNGSINTERESSES .....	40
<b>3 METHODISCHE UND METHODOLOGISCHE GRUNDLAGEN</b>	<b>42</b>
3.1 INTERPRETATIVE UNTERRICHTSFORSCHUNG .....	42
3.1.1 Generierung von Deutungshypothesen durch Abduktion.....	43
3.1.2 Forschungspraktisches Vorgehen: Interaktionsanalyse und Komparation.....	43
3.2 LERNEN UND INTERAKTION.....	46
3.2.1 Die Formen des Lernens nach Miller .....	46
3.2.2 Die Entwicklung strukturell neuen Wissens durch Interaktion .....	47
3.3 DIE ARGUMENTATIONSANALYSE NACH TOULMIN .....	50
<b>4 DESIGN DER UNTERSUCHUNG .....</b>	<b>54</b>
4.1 ENTWICKLUNGSFORSCHUNG .....	54
4.2 DESIGN VON LERNUMGEBUNGEN .....	56
4.2.1 Substantielle Lernumgebungen im Mathematikunterricht .....	56
4.2.2 Besonderheiten substantieller Lernumgebungen zur Förderung des Verständnisses von der theoretischen Wahrscheinlichkeit.....	58
4.2.3 Vorstellung der entwickelten Lernumgebungen .....	60
4.2.4 Präzisierung einer Forschungsfrage.....	73
4.3 AUFBAU UND ABLAUF DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG .....	74
<b>5 ERGEBNISSE DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG.....</b>	<b>79</b>
5.1 VERGLEICH VON ZUFALLSGENERATOREN.....	79
5.1.1 Begriffsklärung.....	80

5.1.2	Beschreibung der Vergleichstypen .....	81
5.1.3	Ausprägungen der verschiedenen Vergleiche .....	83
5.1.4	Verknüpfung der verschiedenen Vergleiche: Kategorien.....	88
5.1.5	Bezüge zwischen den eigenen Kategorien und den Ergebnissen anderer Studien .....	95
5.2	LERNCHANCEN FÜR DIE ENTWICKLUNG DES VERSTÄNDNISSES VON DER THEORETISCHEN WAHRSCHEINLICHKEIT .....	97
5.2.1	Rekonstruktion von Lernchancen.....	98
5.2.2	Bezüge zwischen den rekonstruierten Lernchancen und den Ergebnissen anderer Studien .....	99
<b>6</b>	<b>FALLBEISPIELE FÜR THEORETISCH GEPRÄGTE VERGLEICHE .....</b>	<b>102</b>
6.1	FALLBEISPIELE FÜR DIE KATEGORIE ‚EIN ISOLIERTER INTERSITUATIVER VERGLEICH VON ANZAHLNEN‘ .....	102
6.2	EIN FALLBEISPIEL FÜR DIE KATEGORIE ‚ZWEI ISOLIERTE INTERSITUATIVE VERGLEICHE VON ANZAHLNEN‘ .....	109
6.3	FALLBEISPIELE FÜR DIE KATEGORIE ‚EIN INTERSITUATIV BASIERTER VERGLEICH VON ANZAHLBEZIEHUNGEN‘ .....	112
6.4	FALLBEISPIELE FÜR DIE KATEGORIE ‚EIN INTRASITUATIV BASIERTER VERGLEICH VON ANZAHLBEZIEHUNGEN‘ .....	118
<b>7</b>	<b>FALLBEISPIELE FÜR LERNCHANCEN .....</b>	<b>129</b>
7.1	EIN FALLBEISPIEL FÜR EINE EMPIRISCHE PRODUKTIVE IRRITATION.....	129
7.2	FALLBEISPIELE FÜR THEORETISCHE PRODUKTIVE IRRITATIONEN .....	133
7.2.1	Sozialer Konflikt: Konfrontation mit konträrer Aussage .....	133
7.2.2	Darstellungsmittel als Erkenntnismittel .....	139
7.2.3	Grenzen der theoretischen produktiven Irritation .....	141
<b>8</b>	<b>GENERALISIERUNG DER ERGEBNISSE DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG.....</b>	<b>147</b>
<b>9</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK.....</b>	<b>152</b>
9.1	ZUSAMMENFASSUNG WESENTLICHER GRUNDAUFFASSUNGEN UND ENTSCHEIDUNGEN.....	152
9.2	BEANTWORTUNG DER FORSCHUNGSFRAGEN .....	153
9.3	MÖGLICHE ANSCHLUSSFORSCHUNGEN.....	157
	<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>159</b>
	<b>ABBILDUNGSVERZEICHNIS .....</b>	<b>171</b>
	<b>ANHANG.....</b>	<b>173</b>

## Einleitung

„Einer der großen Vorteile  
der Wahrscheinlichkeitsrechnung  
ist der, daß man lernt,  
dem ersten Anschein zu mißtrauen.“  
(Laplace 1996, Orig. von 1814, S. 127)

Stochastische Inhalte stellen noch nicht lange verbindliche Inhalte in der Grundschule dar: Sie wurden erst mit dem KMK-Beschluss von 2004 curricular verankert. Seitdem steht der inhaltsbezogene Kompetenzbereich ‚Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit‘ gleichberechtigt neben den anderen inhaltsbezogenen Kompetenzen. (Krüger, Sill & Sikora 2015, S. 23 f.) Eine derart späte Implementierung dieser Inhalte in den Mathematikunterricht ist umso mehr verwunderlich, wenn man sich die Bedeutung des Stochastikunterrichts vor Augen führt (für eine ausführliche Erläuterung siehe Kapitel 1.2). So können schließlich nicht nur mathematische, sondern im besonderen Maße auch allgemeinbildende Ziele verfolgt werden:

„In unserer vom raschen Austausch enormer Datenmengen geprägten Welt erfahren mathematische Teilgebiete wie Datenanalyse, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine neue bildungspolitische Relevanz. Immer mehr Entscheidungen und Vorhersagen beruhen auf der Analyse statistischer Daten, die Gefahr von Fehlinterpretationen und Missbrauch von Daten nimmt zu.“ (Arbeitskreis Stochastik der GDM 2003, S. 21)

Die Realisierung des Stochastikunterrichts wird allerdings von vielen Lehrkräften als besonders anspruchsvoll angesehen (Krüger, Sill & Sikora 2015, S. 7). Ein Grund dafür scheint darin zu liegen, dass es im Bereich der Stochastik zahlreiche mögliche Fehlerquellen oder Fehlinterpretationen gibt (ebd., S. 7) – oder in den Worten von Pierre Simon Laplace (Zitat siehe oben), dass man lernen muss, dem ersten Anschein zu misstrauen. Auch Schnell (2014, S. 1) beschreibt dieses Phänomen als Ausgangspunkt ihrer Arbeit. So schildern viele Personen, die diesem Thema eher reserviert gegenüberstehen, dass „Stochastik [...] immer anders [ist] als man denkt“ (Schnell 2014, S. 1).

Ein Blick auf die Forschungslandschaft (siehe Kapitel 2) zeigt diese Schwierigkeiten von Kindern sowie auch von Erwachsenen ebenso auf. Angesichts dieser Tatsache ist es nicht verwunderlich, dass in vielen älteren Untersuchungen zu diesem Themenbereich ein defizitärer Blick eingenommen wurde, wobei das Ziel darin lag sogenannte ‚Fehlvorstellungen‘ aufzudecken (siehe hierzu Kapitel 2.2.1). Eine Defizitorientierung ist bei der Einnahme einer konstruktivistischen Grundüberzeugung jedoch nicht hilfreich. Daher nimmt die vorliegende Arbeit Lernprozesse aus einer

kompetenzorientierten Perspektive in den Blick. Individuelle Vorstellungen von Lernenden, die von den gängigen Vorstellungen abweichen, werden dabei als wichtige Ressource für den Erkenntnisprozess gesehen.

Um den Schwierigkeiten zu begegnen, die viele Menschen mit stochastischen Phänomenen haben, wird eine propädeutische Behandlung der Inhalte im Anfangsunterricht als notwendig erachtet. Daher ist die vorliegende Studie im Bereich der Grundschule verortet. Zudem wird eine Fokussierung auf den theoretischen Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vorgenommen (für eine Begründung hierfür siehe Kapitel 2.3). Durch die konstruktivistische Grundeinstellung sind dabei nicht die einzelnen Lernstände, sondern die Lernprozesse der Kinder von besonderem Interesse. Diese werden sowohl in konstruktiver als auch in rekonstruktiver Hinsicht betrachtet, da die Studie zwei Hauptanliegen verfolgt: Zum einen sollen Lerngelegenheiten für die Entwicklung eines Verständnisses von der theoretischen Wahrscheinlichkeit konzipiert und im Rahmen einer Interviewstudie erprobt werden. Zum anderen sollen das Verständnis der Grundschul Kinder von der theoretischen Wahrscheinlichkeit sowie Gelegenheiten für dessen Weiterentwicklung analysiert werden.

In Kapitel 1 werden die dafür notwendigen theoretischen Grundlagen dargestellt, indem der Wahrscheinlichkeitsbegriff mit seinen unterschiedlichen Aspekten erläutert wird. Zudem werden Gründe für eine Behandlung stochastischer Inhalte in der Grundschule dargelegt. Darüber hinaus wird die gegenwärtige unterrichtliche Praxis idealtypisch beschrieben, indem aufgezeigt wird, seit wann stochastische Inhalte in die curricularen Vorgaben aufgenommen worden sind und welche Konzepte seitdem entstanden sind. Letztere werden auch auf das eigene Vorhaben in dieser Arbeit bezogen.

Ein Überblick über bereits vorhandene empirische Studien wird in Kapitel 2 gegeben. Hierzu werden zunächst ausgewählte Studien zur Entwicklung des stochastischen Denkens kurz umrissen. Im Anschluss daran werden Studien zu verschiedenen Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erläutert. Dabei wird auf subjektiv geprägte, auf frequentistisch geprägte sowie auf theoretisch geprägte Einschätzungen Bezug genommen. Auf dieser Grundlage wird in Teilkapitel 2.3 das eigene Forschungsinteresse entwickelt: In konstruktiver Hinsicht stellt sich die Frage, wie Lernumgebungen gestaltet werden können, mit denen die Entwicklung eines Verständnisses von der theoretischen Wahrscheinlichkeit angeregt werden kann. In rekonstruktiver Hinsicht stellt sich zunächst einmal die Frage, welches Verständnis von der theoretischen Wahrscheinlichkeit bei Grundschulkindern rekonstruiert werden kann. Ein besonderes Anliegen dieser Arbeit liegt dabei auf der Betrachtung von Lernprozessen, da es schließlich darum geht eine Weiterentwicklung des Verständnisses anzuregen. Insofern stellt sich als zweite rekonstruktive Forschungsfrage die folgende:



Welche Lernchancen bieten die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Lernumgebungen für die Entwicklung des Verständnisses von der theoretischen Wahrscheinlichkeit?

Die methodischen und methodologischen Grundlagen, die für die Beantwortung der Forschungsfragen genutzt werden, werden in Kapitel 3 aufgearbeitet. Die Arbeit kann dabei grundlegend der interpretativen Unterrichtsforschung zugeordnet werden. Daher wird zunächst dieser Forschungsansatz beschrieben. Zudem wird erläutert, wie Erkenntnisse gewonnen werden. Dazu wird sowohl allgemein auf die Generierung von Deutungshypothesen durch Abduktion als auch auf das konkrete forschungspraktische Vorgehen durch Interaktionsanalyse und Komparation von Interaktionseinheiten eingegangen. Daran anschließend werden verschiedene Formen des Lernens aufgezeigt und die Rolle der Interaktion für die Entwicklung neuen Wissens hervorgehoben. Den Abschluss des Kapitels bildet die Beschreibung der Argumentationsanalyse nach Toulmin, da dieses Analyseinstrument genutzt wird, um das Verständnis der Kinder zu rekonstruieren.

Im vierten Kapitel wird das Design der Untersuchung vorgestellt. Einleitend wird hierzu das Konzept des Design Research beschrieben, da die Studie darin verortet werden kann. Danach wird erläutert, was allgemein unter substantiellen Lernumgebungen im Mathematikunterricht verstanden wird. Im Anschluss daran werden die Besonderheiten substantieller Lernumgebungen beschrieben, mit denen das Verständnis von der theoretischen Wahrscheinlichkeit gefördert werden soll. In Teilkapitel 4.2.3 werden die Lernumgebungen ‚Mutprobe‘, ‚Würfelrennen‘ und ‚Plättchenrennen‘ vorgestellt, welche im Rahmen der Arbeit entwickelt wurden. Diese sind jeweils in einem Spiel eingebettet. Daher werden sowohl der Spielablauf als auch die an das Spiel anknüpfenden Aufgabenstellungen beschrieben. Danach wird jeweils der Aufbau der Lernumgebung erläutert. Auf dieser Grundlage wird in Teilkapitel 4.2.4 die erste rekonstruktive Forschungsfrage präzisiert: So wird diesbezüglich nun der Frage nachgegangen, wie sich Vergleiche von Grundschulkindern charakterisieren lassen, die von der theoretischen Wahrscheinlichkeit geprägt sind. In Teilkapitel 4.3 wird der Aufbau sowie der Ablauf der empirischen Untersuchung dargestellt. Dabei wird auch ausgeführt, dass im Rahmen der Untersuchung leitfadengestützte Interviews mit Kinderpaaren durchgeführt werden, in denen die entwickelten Lernumgebungen erprobt werden. Zudem wird erläutert, weshalb sich die Auswertung der Daten und somit auch die in den Kapiteln 5 bis 7 dargestellten Ergebnisse und Fallbeispiele zunächst lediglich auf die Lernumgebung ‚Würfelrennen‘ beziehen.

Die Ergebnisse der empirischen Untersuchung werden in Kapitel 5 dargestellt und erläutert. Hierzu erfolgt zunächst eine Hinführung, bei der für die Erläuterung der Ergebnisse notwendige Begriffe geklärt und die verschiedenen herausgearbeiteten Vergleichstypen sowie auch deren mögliche Ausprägungen beschrieben werden. Auf

dieser Grundlage werden dann die verschiedenen rekonstruierten Kategorien beschrieben und mithilfe eines idealtypischen Argumentationsschemas dargestellt. Bei diesen Kategorien handelt es sich letztendlich um einzelne Vorstellungen, die eingenommen werden können, sodass hiermit die erste rekonstruktive Forschungsfrage beantwortet wird. Daran anknüpfend wird in Teilkapitel 5.2 die zweite rekonstruktive Forschungsfrage beantwortet, indem verschiedenartige Lernchancen herausgearbeitet werden. Sowohl im Anschluss an die rekonstruierten Kategorien als auch an die rekonstruierten Lernchancen findet eine Bezugnahme zum Forschungsstand statt.

In Kapitel 6 und 7 werden, anknüpfend an die Ergebnisse aus Kapitel 5, Fallbeispiele beschrieben. Kapitel 6 bezieht sich dabei auf die rekonstruierten Kategorien, sodass an dieser Stelle also lediglich einzelne Argumentationen innerhalb der Interviews analysiert werden. Kapitel 7 befasst sich hingegen mit der Charakterisierung von Lernchancen für die Entwicklung eines Verständnisses von der theoretischen Wahrscheinlichkeit. Daher werden in diesem Kapitel Entwicklungen von Argumentationen erläutert und mögliche Gründe dafür erörtert.

Eine Generalisierung der Ergebnisse der empirischen Untersuchung wird in Kapitel 8 vorgenommen. Es wird aufgezeigt, dass die Ergebnisse nicht nur für die Lernumgebung ‚Würfelrennen‘ zutreffen, sondern auf alle Zufallsexperimente übertragen werden können, bei denen der Fokus auf theoretisch geprägten Vergleichen von Ereignissen liegt.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Kapitel 9 ab. Hier werden zunächst wesentliche Grundauffassungen und Entscheidungen resümiert. Anschließend werden die zentralen Ergebnisse der Studie durch die Beantwortung der Forschungsfragen zusammengefasst. Zum Schluss wird ein Ausblick auf mögliche Anschlussforschungen gegeben.

# 1 Ausgangspunkte für die Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeiten

## 1.1 Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

„Wahrscheinlichkeit hat immer etwas mit Ungewissheit zu tun.“ (Büchter & Henn 2007, S. 159) Wie wahrscheinlich ist es beispielsweise, dass am kommenden Spieltag ein bestimmter Fußballverein gewinnt? Oder wie wahrscheinlich ist es mit einem regulären (sechseckigen) Spielwürfel eine 6 zu werfen? Durch die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten sollen diese und viele weitere Fragen beantwortet werden, sodass aus der vollkommenen Ungewissheit eine auf fundierten Vermutungen basierende Unsicherheit entsteht (Martignon & Wassner 2005, S. 203).

Doch auf welcher Basis soll das Eintreten zukünftiger Ereignisse prognostiziert werden?<sup>1</sup> „Eine erschöpfende und definitive Begriffsklärung [...] ist beim Wahrscheinlichkeitsbegriff prinzipiell nicht möglich.“ (Steinbring 1985, S. 97) Der Begriff beruht je nach Kontext (Alltag, wissenschaftliche Arbeiten, etc.) auf verschiedenen Vorstellungen und ist an unterschiedliche Deutungen gebunden (Büchter & Henn 2007, S. 159 f.). „So zeigt ein erster flüchtiger Gesamtüberblick, daß (sic!) es wohl kaum einen anderen mathematischen Begriff gibt, der eine ähnliche Vielfalt verschiedenartiger Definitionen und gegensätzlicher Interpretationen<sup>2</sup> aufweist, wie der Begriff der Wahrscheinlichkeit.“ (Steinbring 1980, S. 1)

In Anlehnung an Krüger, Sill & Sikora (2015, S. 237 f.) und Steinbring (1980, 1985) wird in dieser Arbeit die Auffassung vertreten, dass es genau *einen* (fundamentalen) Wahrscheinlichkeitsbegriff gibt, der verschiedene Bedeutungen hat. Die spezifischen Bedeutungen stellen selbst auch wiederum eigenständige Begriffe dar (siehe Steinbring 1985, S. 97 f.), sie unterscheiden sich jedoch von dem Wahrscheinlichkeitsbegriff hinsichtlich ihres Rangs (für die Unterscheidung von Begriffen siehe Winter 1983). Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit diesbezüglich nicht von unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffen, sondern zur Vermeidung sprachlicher Missverständnisse und in Anlehnung an Krüger, Sill & Sikora (2015, S. 237 f.) von Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gesprochen.

---

<sup>1</sup> In dieser Arbeit werden grundsätzlich Zufallsexperimente mit endlicher Ergebnismenge betrachtet, weshalb sich die Erläuterungen auch nur auf derartige Zufallsexperimente beziehen.

<sup>2</sup> Gemeint ist hierbei vor allem der Gegensatz zwischen subjektiven und objektiven Interpretationen (Steinbring 1980, S. 2).

Im Folgenden werden die theoretische Wahrscheinlichkeit, die frequentistische Wahrscheinlichkeit sowie die subjektive Wahrscheinlichkeit (als Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs) erläutert (siehe hierfür z.B. auch Heitele 1976, S. 23 ff.).<sup>3</sup>

Die theoretische (auch klassische) Wahrscheinlichkeit geht auf den französischen Mathematiker und Physiker Pierre Simon Laplace (1749-1827) zurück. Dementsprechend wird dieser Ansatz auch als Laplace-Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Er beruht auf der Grundannahme, dass die einzelnen Elementarereignisse eines Zufallsexperiments<sup>4</sup> gleichwahrscheinlich sind. Dass diese Annahme zutrifft, kann zwar mit einer Versuchsreihe empirisch geprüft, letztendlich aber nie sicher bewiesen werden. Es gibt jedoch zwei Gründe, aufgrund derer man diese Annahme unterstellen kann: Einerseits können theoretische Überlegungen zur Begründung herangezogen werden. So kann beispielsweise bei einem regulären Spielwürfel aufgrund der Symmetrieeigenschaften die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit unterstellt werden. (Büchter & Henn 2007, S. 167 ff.) Andererseits ist diese Unterstellung auch aufgrund vollkommener Ungewissheit möglich (ebd., S. 168), letztendlich also aufgrund des Prinzips des unzureichenden Grundes (Eichler & Vogel 2013, S. 152): Wenn keine plausiblen Gründe dafür vorliegen, weshalb ein Elementarereignis mit höherer Wahrscheinlichkeit eintreten könnte als ein anderes, dann kann angenommen werden, dass die Elementarereignisse dieselbe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzen (ebd., S. 152, für die Erläuterung an einem Beispiel siehe S. 162).

Wenn bei einem Zufallsexperiment mit endlicher Ergebnismenge die Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Elementarereignisse angenommen wird, dann kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $E$  wie folgt bestimmt werden:  $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ . Damit setzt sie sich aus dem Quotienten der Anzahl aller für das Ereignis günstigen Elementarereignisse  $|E|$  und der Anzahl aller möglichen Elementarereignisse  $|\Omega|$  zusammen. (Büchter & Henn 2007, S. 167 f.)

---

<sup>3</sup> Darüber hinaus findet sich in der Literatur u.a. noch die geometrische Wahrscheinlichkeit (siehe z.B. Kütting & Sauer 2011, S. 121 ff.; Neubert 2012, S. 30 ff.). Dieser Aspekt wird jedoch aufgrund der Nähe zur theoretischen Wahrscheinlichkeit im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter berücksichtigt. Der Begriff ‚Wahrscheinlichkeit‘ wird darüber hinaus durch Axiome festgelegt, welche erstmals von Kolmogoroff nachgewiesen wurden (siehe z.B. Heitele 1976, S. 31 ff.; Büchter & Henn 2007, S. 183 ff.; Kütting & Sauer 2011, S. 97 ff.; Krüger, Sill & Sikora 2015, S. 238 f.). Die Axiome werden in dieser Arbeit jedoch nicht erläutert, weil ein derartig formaler Umgang mit Wahrscheinlichkeiten noch nicht in der Grundschule angestrebt wird und somit für die vorliegende Arbeit nicht relevant ist.

<sup>4</sup> Unter einem Zufallsexperiment werden reale Vorgänge (Versuche) verstanden, die unter exakt festgelegten Bedingungen stattfinden. Die möglichen Ausgänge (auch Ergebnisse/Elementarereignisse) des Versuchs stehen dabei bereits vorab fest. Es ist jedoch nicht bekannt, welcher dieser Ausgänge eintreten wird. Darüber hinaus wird angenommen, dass der Versuch prinzipiell unter den gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden kann. (Kütting & Sauer 2011, S. 89 f.)