

MaMut

Materialien für den Mathematikunterricht

8



Stephanie Gleich (Hrsg.)

Problemlösen lehren und bewerten



1. Auflage Januar 2020
Veröffentlicht im Verlag Franzbecker
Hildesheim

© 2020 Verlag Franzbecker, Hildesheim

ISBN 978-3-88120-892-5

Stephanie Gleich (Hrsg.)

Problemlösen lehren und bewerten

MaMut - Materialien für den Mathematikunterricht Band 8

www.franzbecker.de

Inhalt

| | |
|--|-----|
| Vorwort | 7 |
| <i>Nicolai von Schroeders:</i> | |
| Heurismen: Hilfsmittel, Strategie, Prinzip. Was ist was und welche Bedeutung kommt den Heurismen im Problemlöseprozess zu? | 9 |
| <i>Stephanie Gleich, Lisa Högendörfer, Johannes Schmidt:</i> | |
| Problemlösen in unterschiedlichen mathematischen Kontexten üben | 39 |
| <i>Jessica Müller, Nicolai von Schroeders:</i> | |
| Bewerten schriftlicher Ausarbeitungen zu Problemlöseaufgaben | 81 |
| <i>Theresa Greska, Lisa Langer:</i> | |
| Problemlöseaufgaben mit verschiedenen Lösungsansätzen | 107 |

Vorwort

Stephanie Gleich

Der vorliegende Tagungsband enthält Beiträge der achten Fortbildungsveranstaltung MaMut (Materialien für den Mathematikunterricht) im März 2020, welche unter dem übergeordneten Thema „*Problemlösen lehren und bewerten*“ stand.

Die einzelnen Beiträge beleuchten unterschiedliche Schwerpunkte des Themenbereichs, welche von der Beschreibung typischer Vorgehensweisen, über das Üben hin zur Bewertung schriftlicher Ausarbeitungen beim Problemlösen reichen.

Der Fokus der Beiträge liegt neben der Ausarbeitung der grundlegenden fachdidaktischen Theorie auf der Darstellung unterrichtsrelevanter Materialien, wie beispielsweise konkrete Problemstellungen mit Lösungsskizzen, Tafelbildern oder Bewertungsrastern, sowie konkreter Anregungen zur Umsetzung der Inhalte im Unterricht.

Nicolai von Schroeders gibt in seinem Beitrag „*Heurismen: Hilfsmittel, Strategie, Prinzip. Was ist das und welche Bedeutung kommt den Heurismen im Problemlöseprozess zu?*“ einen Überblick über verschiedene Vorgehensweisen - sogenannte Heurismen – welche einen Problemlöseprozess unterstützen können. Er ordnet die verschiedenen Heurismen unterschiedlichen Phasen in einem Problemlöseprozess zu und verdeutlicht seine Ausführungen mit schulrelevanten Beispielen.

Anschließend beschreiben Stephanie Gleich, Lisa Högendörfer und Johannes Schmidt in ihrem Beitrag „*Problemlösen in unterschiedlichen mathematischen Kontexten üben*“ Lerngelegenheiten zum Problemlösen für die 5. und 6. Jahrgangsstufe einer Mittelschule (oder einer inhaltlich vergleichbaren Jahrgangsstufe einer anderen Schulform). Darin werden allgemeine und aufgabenspezifische Möglichkeiten hervorgehoben, welche Schülerinnen und Schüler im Unterricht bei der eigenständigen Bearbeitung von mathematischen Problemen unterstützen können.

Im darauffolgenden Beitrag *„Bewerten schriftlicher Ausarbeitungen zu Problemlöseaufgaben“* stellen Jessica Müller und Nicolai von Schroeders Möglichkeiten der Bewertung schriftlicher Ausarbeitungen zum Problemlösen vor. Sie geben dazu unterrichtsrelevante Beispiele für Aufgabenformulierungen an und beschreiben mögliche Bewertungsraster.

Im abschließenden Beitrag *„Problemlöseaufgaben mit verschiedenen Lösungsansätzen“* von Theresa Greska und Lisa Langer werden Problemstellungen zu unterschiedlichen mathematischen Kontexten einer 6. Jahrgangsstufe (Realschule) und einer 9. Jahrgangsstufe (Gymnasium) vorgestellt. Die dargestellten Lösungsansätze dienen dazu, aufzuzeigen, wie die Aufgaben durch den Einsatz verschiedenster Heuristiken gelöst werden können.

Heurismen: Hilfsmittel, Strategie, Prinzip. Was ist das und welche Bedeutung kommt den Heurismen im Problemlöseprozess zu?

Nicolai von Schroeders

Im folgenden Beitrag werden verschiedene Methoden und Vorgehensweisen vorgestellt, die den eigentlichen Problemlöseprozess unterstützen und zu einem Erkenntnisgewinn führen können. Die zugehörige Lehre wird als Heuristik „Lehre von den Wegen zur Gewinnung neuer Erkenntnisse“ und die zugehörigen Methoden und Vorgehensweisen im Allgemeinen als Heurismen bezeichnet.

Die Heurismen lassen sich in drei Kategorien unterteilen. Neben den heuristischen Hilfsmitteln, die in der Phase des Verstehens einer Aufgabe zum Einsatz kommen, dienen die heuristischen Strategien und die heuristischen Prinzipien dem Finden möglicher Lösungsansätze. Deutlich wird schon bei dieser ersten Zuordnung der Heurismen, dass das mathematische Problemlösen kein einzelner Prozess ist, sondern sich in mehrere Phasen aufteilt.

Im ersten Kapitel werden deshalb die grundlegenden Überlegungen zum mathematischen Problemlösen von Polya (1949) mit dem Schwerpunkt auf die verschiedenen Lösungsphasen kurz vorgestellt und eine erste Zuordnung der Heurismen vorgenommen.

Das zweite, dritte und vierte Kapitel geht dann – in der Reihenfolge – auf die schulrelevanten heuristischen Hilfsmittel, die Strategien und Prinzipien ein und verdeutlicht diese mit unterrichtsnahen Aufgaben.

Den Abschluss bildet ein Fazit, in dem die Bedeutung der Trennung der Phasen als auch die Verwendung der einzelnen Heurismen für das mathematische Problemlösen im Mathematikunterricht nochmal argumentativ untermauert wird.

1. Was bedeutet mathematisches Problemlösen?

Schon in den 40er Jahren des letzten Jahrhunderts hat sich Polya (1949) mit dem Problemlösen intensiv auseinandergesetzt und dabei die eigenen Erfahrungen systematisiert. Als Resultat lässt sich das mathematische Problemlösen in vier Phasen unterteilen und jede dieser Phasen mit speziellen Fragestellungen charakterisieren.

| | |
|---|--|
| 1. Phase Verstehen der Aufgabe | Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung? Ist es möglich die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein! ... |
| 2. Phase Ausdenken eines Planes | Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Kennst Du verwandte Aufgaben? Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Hast Du alle Daten benutzt? ... |
| 3. Phase Ausführen des Planes | Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so kontrolliere jeden Schritt. Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, dass er richtig ist? |
| 4. Phase Rückschau | Kannst Du das Resultat kontrollieren? Kannst Du den Beweis kontrollieren? Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgendeine andere Aufgabe gebrauchen? ... |

Tab. 1: Phasen des Problemlösens
(Polya 1949, Innenseite Buchdeckel, gekürzt)

Die erste Phase dient vor allem dem Zweck, die Aufgabe zu verstehen und die präsentierten Angaben im Kontext der Aufgabe einzuordnen.

Deshalb kommen vor allem Heurismen zum Einsatz, die primär dem Verständnis und der Plausibilitätsprüfung der Daten dienen. Idealerweise lassen sich so erste Lösungsideen entwickeln oder auch mögliche Lösungsansätze identifizieren. Aus diesem Grund macht es Sinn, diese Heurismen als heuristische Hilfsmittel (vgl. Kap. 2) zu bezeichnen, um sie damit vor allem von den heuristischen Strategien und Prinzipien abzugrenzen (vgl. Kap. 3 und 4). Um die Wirksamkeit und auch Notwendigkeit der heuristischen Hilfsmittel zu verdeutlichen, werden dazu in Kapitel 2 Beispiele vorgestellt.

Die zweite Phase des Ausdenkens eines Planes geht dann einen Schritt weiter und thematisiert den Prozess, in dem Lösungsansätze entwickelt werden und mögliche Vorgehensweisen erdacht werden. Diese Phase wird durch den Einsatz heuristischer Strategien wie beispielsweise dem Analogieschluss oder das Vorwärtsarbeiten (vgl. Kap. 3) dominiert. Dabei finden auch heuristische Prinzipien (vgl. Kap. 4) Anwendung.

In der dritten Phase wird dann jeder einzelne Schritt eines ausgedachten Planes durchgeführt und verifiziert. In dieser Phase kommen also keine Heurismen mehr zum Einsatz, sondern der Fokus liegt auf der argumentativen Begründung und Überprüfung eines jeden möglichen Lösungsschrittes. Daraus kann sich dann bestenfalls eine Lösung eines Problems ergeben, es kann aber auch der Fall eintreten, dass ein eingeschlagener Weg in eine „Sackgasse“ führt. In diesem letzten Fall wird es dann hilfreich sein, noch mal die Daten und Erkenntnisse aus der ersten Phase zu validieren und gegebenenfalls zu ergänzen, um dann im Anschluss – vielleicht auch durch das Anwenden einer anderen heuristischen Strategie – erneut in der zweiten Phase dem Ausdenken eines Planes aufzugreifen.

Die ersten drei Phasen eines Lösungsprozesses beim mathematischen Problemlösen werden also nicht zwangsweise linear hintereinander abgearbeitet, sondern gegebenenfalls ist ein mehrmaliges Durchlaufen dieser drei Phasen notwendig, um – vielleicht – zu einer Lösung zu kommen (vgl. Abb. 1).