Andreas Filler
Anselm Lambert (Hrsg.)

Geometrie als Quelle von Bildung:

Anwenden, Strukturieren, Problemlösen

Vorträge auf der 36. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 13. bis 15. September 2019 in Saarbrücken

Titelbild: Hans Walser: Parametrisierung der Hundekurve (siehe S. 53)

Andreas Filler, Anselm Lambert (Hrsg.)
Geometrie als Quelle von Bildung: Anwenden, Strukturieren, Problemlösen
Arbeitskreises Geometrie 2019
ISBN 978-3-88120-616-7
1. Auflage 2020
Veröffentlicht im Verlag Franzbecker

www.franzbecker.de

Inhaltsverzeichnis

Editorial

Andreas Filler, Anselm Lambert

Der vorliegende Tagungsband enthält Beiträge der Herbsttagung 2019 des Arbeitskreises Geometrie in der GDM, die unter dem übergeordneten Thema *Geometrie als Quelle von Bildung: Anwenden, Strukturieren, Problemlösen* stand. Dieses Thema spiegelt sich in einem breiten Spektrum von Beiträgen wieder, das sowohl das Lehren und Lernen recht elementarer geometrischer Inhalte in der Sekundarstufe I als auch weiterführende Themen umfasst, die sich vor allem für die Begabtenförderung eignen.

Frederik Dilling untersucht, wie das Spannungsfeld *zwischen Anwenden und Strukturieren* anhand von *Schwerpunktbestimmungen ebener Figuren nach Archimedes* für den Mathematikunterricht fruchtbar gemacht werden kann. In dem Beitrag werden Aussagen über Flächenschwerpunkte ebener Figuren aus wenigen Voraussetzungen entwickelt, die im Wesentlichen auf dem Hebelgesetz basieren. Dabei ergänzen sich empirische und deduktive Vorgehensweisen.

Der Beitrag *Grundlegende Aspekte des Messens und Berechnens am Ende der Sekundarstufe I* von *Myriam Hamich* gewährt einen Einblick in die Entwicklung eines Modells, welches sich als Zusammenfassung möglichst aller zentralen Aspekte des Messens und Berechnens am Ende der Sekundarstufe versteht und als theoretischer Bezugsrahmen in der Schnittstellendiskussion am Übergang Schule-Hochschule angedacht ist.

Andreas Filler zeigt in seinem Beitrag *Dynamische Geometrie mit dem Metallbaukasten?* zunächst auf, dass die Idee „dynamischer Geometrie“ wesentlich älter ist als ihre Umsetzung mittels Computersoftware. Es werden Ideen einer didaktischen Handreichung von 1959 und ihre Umsetzung mittels eines „Geometriebaukastens“ beschrieben. Dabei wird der Frage nachgegangen, welche didaktischen Vor- und Nachteile die Erkenntnisgewinnung mithilfe „handgreiflichen“ Materials gegenüber der Nutzung von Zirkel, Lineal und Geodreieck sowie von Dynamischer Geometriesoftware hat.

Hans Walser übt in seinem Beitrag *Aufwickeln und Abwickeln* zunächst Kritik an der Verwendung Begriffs Netz für Abwicklungen z. B. von Würfeln. Danach stellt er verschiedene Abwicklungen sowohl im Drei- als auch im Zweidimensionalen vor. Er gelangt dabei zu interessanten Kurven, u. a. zur

„Hundekurve". Diese wird sowohl analytisch (mittels einer Parameterdarstellung) beschrieben als auch mechanisch erzeugt, wozu eine Konstruktion zum Einsatz kommt, die mithilfe eines Metallbaukastens realisiert wurde.

Ausgangspunkt des Beitrags *Vom Inkreis zur Hyperbel* von *Jörg Meyer* sind innere und äußere Berührkreise von drei Kreisen. Im Folgenden untersucht er dann Kreise, die nur zwei gegebene Kreise berühren, und kommt zu dem Ergebnis, dass die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise von außen berühren, auf einem Hyperbelast liegen. Die Hyperbelkonstruktion lässt sich analog zur bekannten Parabelkonstruktion durchführen. Damit liefert das Thema eine problemnahe Einführung in das Gebiet „Kegelschnitte" mit „open-end"-Charakter.

Günter Graumann untersucht in seinem Beitrag *Die Thalesfigur dynamisch betrachtet – ein elementargeometrisches Problemfeld* abhängige Größen bzw. Bahnkurven, wobei der variable Punkt sich auf einem Thaleskreis bewegt. Zuerst werden die Bahnkurven von besonderen Dreieckspunkten und die Veränderungen der Seitenlängen und des Flächeninhalts erörtert, dann werden mögliche Variationen des Themas aufgezählt und schließlich die Bahnkurven von Rechteckpunkten bei der Erzeugung des Thaleskreises durch das Einfügen eines Rechtecks zwischen zwei feste Punkte diskutiert.

In dem Beitrag *Erkenntnisgewinn durch Perspektivwechsel: Die Pellsche Gleichung* von *Hartmut Müller-Sommer* wird die in der Zahlentheorie bedeutsame Pellsche Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ in den Blick genommen. Eine Veränderung der Perspektive auf die Lösungen dieser Gleichung führt zu einer geometrischen Interpretation und deckt überraschende Zusammenhänge zum Dreieckssatz von Stewart und zum Kreis des Apollonius auf.

Der Beitrag *Vom Bildungswert der Dualität* von *Klaus Volkert* behandelt einige Aspekte der Dualität im Bereich der Polyedertheorie und der projektiven Geometrie. Anhand von Beispielen wird aufgezeigt, dass auch ohne eine tiefgreifende Behandlung der projektiven Geometrie interessante Fragen behandelt werden können, die einen adäquaten Eindruck vom Dualitätsprinzip und seiner Nützlichkeit geben. Schließlich wird der Frage nachgegangen, worin der Bildungswert der Dualität bestehen könnte.

Zwischen Anwenden und Strukturieren – Schwerpunktbestimmungen ebener Figuren nach Archimedes im Mathematikunterricht

Frederik Dilling

Zusammenfassung. Unter einem mathematischen Beweis versteht man im Allgemeinen die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bewiesenen Sätzen. Was aber, wenn die für einen Beweis gesetzten Voraussetzungen Ergebnisse der Naturwissenschaften darstellen? Im Buch „Über das Gleichgewicht ebener Flächen“ von Archimedes werden die Flächenschwerpunkte ebener Figuren wie Parallelogramm oder Dreieck aus wenigen Voraussetzungen entwickelt, die im Wesentlichen auf dem Hebelgesetz basieren. Dies kann im Unterricht Prozesse des Beweisens und Strukturierens von Aussagen anregen und ermöglicht ein historisch begründetes empirisch-orientiertes Vorgehen zur Einführung des Themas Schwerpunkte.

1. Zum Verhältnis von Beweis und Empirie

Stellt man einem Mathematiker die Frage „Was ist Mathematik?“, so wird dieser vermutlich antworten, dass es sich um eine Wissenschaft zur Untersuchung abstrakter Strukturen handelt. In dieser formalen wissenschaftlichen Auffassung von Mathematik tritt der Beweis als deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes nach bestimmten Schlussregeln aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen als zentrales Element auf. Harro Heuser beschreibt dies in seinem bekannten Lehrwerk zur Analysis wie folgt:

> *„Es versteht sich heutzutage von selbst, daß jede Darstellung der Analysis gemäß der axiomatischen Methode zu erfolgen hat: Der ganze Bestand analytischer Aussagen muß streng deduktiv aus einigen Grundeigenschaften reeller Zahlen entfaltet werden. Jede mathematische Disziplin verdankt ihre Sicherheit, ihre Überzeugungskraft und ihre Schönheit dieser Methode. Zu sehen, wie der reiche Teppich der Analysis mit seinen unendlich mannigfaltigen Farben und Figuren aus wenigen Fäden (den Axiomen über reelle Zahlen) enger und enger geknüpft wird – das ist eine geistige Erfahrung höchsten Ranges, um die kein Student betrogen werden darf.“* (Heuser, 2009, S.5)

Eine solche formale Auffassung von Mathematik lässt sich insbesondere im wissenschaftlichen Bereich an Universitäten auffinden. Die Darstellung der Mathematik im Schulunterricht und die Rolle des Beweises unterscheiden sich hiervon teilweise stark. Hefendehl-Hebeker (2016) schreibt mit Bezug auf Freudenthal (1983):

> *„Im Sinne dieser Sprechweise haben die Begriffe und Inhalte der Schulmathematik ihre phänomenologischen Ursprünge überwiegend in der uns umgebenden Realität. […] Die Geometrie (synthetisch und analytisch) ist auf das Erkennen und Beschreiben von Strukturen in unserer Umwelt und somit auf den dreidimensionalen Anschauungsraum bezogen, der Umgang mit Zahlen, Größen und Funktionen findet seine Sinngebung vorwiegend in der Lösung lebensweltlicher Probleme und die Stochastik betrachtet Zufallserscheinungen in alltagsweltlichen Situationen. „Dies alles kann durchaus intellektuell anspruchsvoll behandelt werden, auch mit lokalen Deduktionen, wo sie der Erkenntnissicherung dienen oder der Arbeitsökonomie.“ (Kirsch 1980, S. 231). Jedoch bleibt insgesamt die ontologische Bindung an die Realität bestehen, wie es bildungstheoretisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgabe und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt ist.“ (S.16)*

Mathematisches Wissen wird im Unterricht somit überwiegend durch den Umgang mit realen Phänomenen entwickelt, sodass eine ontologische Bindung des mathematischen Wissens mit Bezug auf gewisse empirische Referenzobjekte entsteht. Damit sind die Untersuchungsgegenstände der Schulmathematik in weiten Teilen keine abstrakten Objekte, sondern konkrete empirische Objekte (vgl. Burscheid & Struve, 2010). Die Mathematik an der Schule ist eine quasi-empirische Wissenschaft, ähnlich einer Naturwissenschaft (vgl. Lakatos, 1976) und die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine empirische Auffassung von Mathematik.

Damit ist auch die Rolle des Beweises in der Schulmathematik eine andere als in der Mathematik als Fachwissenschaft. Jahnke und Ufer (2015) beschreiben dies folgendermaßen:

> *„Es besteht ein weitgehender Konsens, dass sich ein axiomatisch-deduktives Vorgehen im allgemeinbildenden Mathematikunterricht verbietet. Vom Beweisen bleibt dann der Anspruch übrig, dass Aussagen auf Gründe zurückgeführt werden sollen. Welche Gründe als akzeptabel gelten, hängt vom Entwicklungsniveau der Schülerinnen und Schüler ab und ist letztlich Sache des in einer Lerngemeinschaft vorgefundenen „geteilten Wissens“.“ (S.333f.)*

Der Wahrheitsbegriff der Schulmathematik ist damit in weiten Teilen an einer empirischen Überprüfbarkeit ausgerichtet. Die Wissenssicherung geschieht insbesondere beispielgebunden und experimentell, logische Ableitungen werden dann zur Wissenserklärung herangezogen.